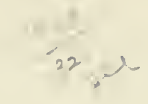


Q.515.43
L4871

N° D'ORDRE
1105.

THÈSES



PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. HENRI LEBESGUE,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, PROFESSEUR AU LYCÉE DE NANCY.

1re THÈSE. — INTÉGRALE, LONGUEUR, AIRE.
2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 30 juin 1902 devant la Commission d'Examen.

MM. PICARD, *Président.*
KOENIGS, GOURSAT, } *Examinateurs.*

MILAN,
IMPRIMERIE BERNARDONI DE C. REBESCHINI & C.
Rue Rovello, 14-16.

1902

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

	MM.	
DOYEN	DARBOUX	Géométrie supérieure.
PROFESSEUR HONORAIRE	TROOST.	
PROFESSEURS	LIPPMANN	Physique.
	HAUTEFEUILLE	Minéralogie.
	BOUTY	Physique.
	APPELL	Mécanique rationnelle.
	DUCLAUX	Chimie biologique.
	BOUSSINESQ	Calcul des probabilités et Physique mathématique.
	PICARD	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
	H. POINCARÉ	Astronomie mathématique et Mécanique céleste.
	Yves DELAGE	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	BONNIER	Botanique.
	DASTRE	Physiologie.
	DITTE	Chimie.
	MUNIER-CHALMAS	Géologie.
	GIARD	Zoologie, Evolution des êtres organisés.
	WOLF	Astronomie physique.
	KŒNIGS	Mécanique physique et expérimentale.
	VÉLAIN	Géographie physique.
	GOURSAT	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	CHATIN	Histologie.
	PELLAT	Physique.
	HALLER	Chimie organique.
	H. MOISSAN	Chimie.
	JOANNIS	Chimie (Ens[nt] P. C. N.).
	P. JANET	Physique (Ens[nt] P. C. N.).
	N.	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
PROFESSEURS ADJOINTS	PUISEUX	Mécanique et Astronomie.
	RIBAN	Chimie analytique.
	RAFFY	Eléments d'Analyse et de Mécanique.
	LEDUC	Physique.
	HAUG	Géologie.
	HADAMARD	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	ANDOYER	Mécanique et Astronomie.
SECRÉTAIRE	A. GUILLET.	

MILAN. — IMPRIMERIE BERNARDONI DE C. REBESCHINI & C., RUE ROVELLO 14-16.

A

Monsieur A. CAUQUIL

PRINCIPAL DU COLLÈGE DE CLERMONT-OISE.

Hommage affectueux et reconnaissant

H. LEBESGUE.

PREMIÈRE THÈSE.

INTÉGRALE, LONGUEUR, AIRE.

INTRODUCTION.

Dans ce travail j'essaie de donner des définitions aussi générales et précises que possible de quelques uns des nombres que l'on considère en Analyse: intégrale définie, longueur d'une courbe, aire d'une surface.

M.r Jordan, dans la seconde édition de son *Cours d'Analyse*, a fait une étude approfondie de ces nombres. Il m'a semblé utile cependant de reprendre cette étude, et voici pourquoi. On sait qu'il existe des fonctions dérivées non intégrables, lorsque l'on adopte, comme le fait M.r Jordan, la définition de l'intégrale qu'a donnée Riemann; de sorte que l'intégration, telle que l'a définie Riemann, ne permet pas dans tous les cas de résoudre le problème fondamental du calcul intégral:

Trouver une fonction connaissant sa dérivée.

Il peut donc sembler naturel de chercher une autre définition de l'intégrale, telle que, dans des cas plus étendus, l'intégration soit l'opération inverse de la dérivation.

D'autre part, comme le remarque M.r Jordan, l'aire d'une surface n'ayant pas des plans tangents variant d'une façon continue n'est pas définie; et les énoncés que l'on serait tenté d'admettre comme analogues à la définition de la longueur d'une courbe ne peuvent être adoptés (*). Il y a donc lieu de chercher une définition de l'aire et peut être aussi de modifier celle

(*) Voir Schwarz, lettre à Genocchi. Cette lettre est reproduite dans l'édition lithographiée du *Cours professé à la Faculté des sciences par* Ch. Hermite, pendant le second semestre de 1882. (Second tirage, page 25.) — Voir aussi Peano, *Atti della Accademia dei Lincei*, 1890.

de la longueur de façon que ces deux définitions soient aussi analogues que possible.

Dans l'étude des questions relatives à la théorie des fonctions de variables réelles on reconnait souvent qu'il serait commode de pouvoir attacher aux ensembles de points des nombres jouissant de certaines des propriétés des longueurs des segments ou des aires des polygones. On a proposé différentes définitions de ces nombres que l'on appelle les mesures des ensembles (*); celle qui a été le plus souvent adoptée se trouve exposée et étudiée dans le livre de M.r Jordan.

Dans le premier chapitre je définis, avec M.r Borel, la mesure d'un ensemble par ses propriétés essentielles. Après avoir complété et précisé les indications un peu rapides que donne M.r Borel (**), j'indique quelles relations il y a, entre la mesure ainsi définie et la mesure au sens de M.r Jordan. La définition que j'adopte s'applique aux espaces à plusieurs dimensions; de la notion de mesure d'un ensemble dont les éléments sont les points d'un plan, on déduit celle d'aire d'un domaine plan; si les éléments sont des points de l'espace ordinaire on en déduit la notion de volume, etc.

Ces préliminaires posés, il n'y a plus d'inconvénients à définir l'intégrale d'une fonction continue comme l'aire d'un domaine plan; et même cette méthode a l'avantage de conduire à une définition de l'intégrale d'une fonction discontinue bornée comme mesure d'un certain ensemble de points. C'est cette définition géométrique que j'adopte au chapitre II; on peut d'ailleurs la remplacer par une définition analytique, l'intégrale se présente alors comme étant la limite d'une suite de sommes assez analogues à celles que l'on considère dans la définition de Riemann. Les fonctions auxquelles s'applique cette définition géométrique sont celles que j'appelle *sommables.*

Je ne connais aucune fonction qui ne soit sommable, je ne sais s'il en existe. Toutes les fonctions qu'on peut définir à l'aide des opérations arithmétiques et du passage à la limite sont sommables. Toutes les fonctions intégrables au sens de Riemann sont sommables et les deux définitions de l'intégrale conduisent au même nombre. Toute fonction dérivée bornée est sommable.

(*) Voir au sujet de ces définitions Schœnflies, *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 1900.

(**) *Leçons sur la théorie des Fonctions.*

L'intégrale d'une dérivée bornée, considérée comme fonction de la limite supérieure d'intégration est une fonction primitive de la dérivée donnée, le problème fondamental du calcul intégral est donc théoriquement résolu toutes les fois que la fonction dérivée donnée est bornée.

Pour obtenir des résultats plus généraux il est nécessaire de donner une définition de l'intégrale s'appliquant à des fonctions non bornées. Il est facile de trouver une telle définition, mais celle qui m'a paru la plus simple et la plus naturelle ne s'applique pas à toutes les fonctions dérivées non bornées; de sorte que pour les fonctions non bornées, le problème de la recherche des fonctions primitives n'est pas résolu dans tous les cas. Avec mes définitions je trouve que *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction dérivée ait une intégrale est que sa fonction primitive soit à variation bornée. Toutes les fois que l'intégrale existe elle fait connaître une fonction primitive.*

Le calcul effectif d'une intégrale dépend essentiellement de la façon dont est donnée la fonction à intégrer. Dans le cas où la fonction est définie à l'aide de séries on pourra se servir de cette propriété, dont un cas particulier a été obtenu par M.r Osgood (*): *Une série dont les termes ont des intégrales et dont les restes sont, en valeur absolue, inférieurs à un nombre fixe est intégrable terme à terme.*

La définition de l'intégrale s'étend immédiatement aux fonctions de plusieurs variables.

Dans le premier chapitre j'ai développé une généralisation de la notion de longueur d'un segment, une généralisation faite dans un sens différent donne la notion de longueur d'une courbe. Dans le troisième chapitre, où je m'occupe de cette notion, j'adopte la définition suivante : *la longueur d'une courbe C est la plus petite limite des longueurs des lignes polygonales qui tendent uniformément vers C.* Cette définition est exactement équivalente à la définition classique (**). Une courbe à longueur finie est dite rectifiable. Je retrouve rapidement les principaux résultats relatifs à ces courbes obtenus par M.r Jordan.

La recherche d'une expression de la longueur d'une courbe ayant des tangentes conduit à une nouvelle application de l'intégrale définie au chapitre précédent. *Si f', φ', ψ' existent, la condition nécessaire et suffisante pour que*

(*) *American Journal*, 1897.

(**) Scheeffer, *Acta Mathematica*, 5; Jordan, *Cours d'Analyse.*

la courbe

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t)$$

soit rectifiable est que l'intégrale de $\sqrt{f'^2 + \varphi'^2 + \psi'^2}$ *existe. Toutes les fois que cette intégrale existe elle représente la longueur de la courbe.* La définition qu'adoptait P. Du Bois Reymond (*) est donc un cas particulier de la définition classique, même en étendant comme je l'ai fait le sens du mot intégrale.

Dans le quatrième chapitre *j'appelle aire d'une surface L la plus petite limite des aires des surfaces polyédrales qui tendent uniformément vers L.* On peut déduire de là une définition de l'aire analogue à celle de la longueur d'une courbe définie comme limite des longueurs des polygones inscrits.

L'étude de la représentation de l'aire à l'aide d'une intégrale double n'est abordée que dans le cas très particulier où la surface admet des plans tangents variant d'une façon continue; on retrouve l'intégrale classique $\int\int \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$.

Les deux derniers chapitres sont consacrés à des recherches assez différentes. Il s'agit de voir, sur des exemples, si l'extension donnée aux sens des mots longueur, aire n'entraine pas des modifications correspondantes dans les énoncés ou les raisonnements de la géométrie des surfaces. Dans ces raisonnements on suppose généralement les surfaces et les courbes analytiques, ou tout au moins définies à l'aide de fonctions ayant un certain nombre de dérivées.

Le premier problème que je me propose est celui des surfaces applicables sur le plan : Chercher les surfaces correspondant point à point à un plan, de façon que les longueurs soient conservées. Je trouve d'une part qu'*il existe des surfaces applicables sur le plan et ne contenant aucun segment de droite*, d'autre part qu'*il existe des courbes gauches ayant en chaque point un plan osculateur et dont les tangentes forment une surface non applicable sur le plan.* Les procédés élémentaires que j'ai employés ne m'ont pas donné toutes les surfaces applicables sur le plan, mais ils m'ont fait connaître les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface cylindrique, conique, une surface formée par les tangentes d'une courbe gauche, une sur-

(*) *Mathematische Annalen*, Bd. 15, pag. 287 et *Acta Mathematica*, 6.

face de révolution soient applicables sur le plan; enfin ils montrent que l'application conserve les aires.

Le second problème est celui de Lagrange ou de Plateau: étant donné un contour fermé trouver une surface limitée à ce contour et dont l'aire soit minima. Je montre que ce problème est toujours possible et admet une infinité de solutions.

Il serait très intéressant de savoir si, parmi toutes ces surfaces solutions, ne se trouve pas une surface analytique. La méthode qui se présente immédiatement à l'esprit et qui consiste à démontrer successivement l'existence de chacune des dérivées nécessaires à l'établissement de l'équation aux dérivées partielles des surfaces minima, paraît fort difficile à appliquer. Cependant des raisonnements très élémentaires m'ont permis dans un cas particulier de démontrer l'existence des plans tangents à l'une des surfaces solutions.

Les méthodes de ce dernier chapitre sont analogues à celles qui ont permis à M.r Hilbert (*) de reprendre l'étude du problème de Dirichlet par le procédé de Riemann. Les résultats obtenus par M.r Hilbert et ceux que je viens d'indiquer, si incomplets qu'ils soient, semblent montrer qu'il y a avantage à laisser de côté, au moins momentanément, les équations aux dérivées partielles que donnent les méthodes ordinaires du calcul des variations, et à raisonner directement sur l'intégrale qu'il s'agit de rendre minima.

J'ai indiqué les principaux résultats de ce travail dans différentes notes des *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences.* (19 Juin et 27 Novembre 1899, 26 Novembre et 3 Décembre 1900, 29 Avril 1901.)

CHAPITRE I.

Mesure des Ensembles.

1. Un ensemble de points est dit borné si la distance de deux de ses points est limitée supérieurement. Deux ensembles sont dits égaux si, en déplaçant l'un deux, on peut les amener à coincider. Des ensembles E_1, E_2,...

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques.* Août 1900.

étant donnés, l'ensemble somme E est formé des points appartenant à l'un au moins des E_i. Nous n'aurons jamais à considérer qu'un nombre fini ou une infinité dénombrable d'ensembles E_i et nous poserons

$$E = E_1 + E_2 + \cdots$$

Si tout point de E_2 est point de E_1, on dit que E_1 contient E_2 et l'on appelle différence de E_1 et E_2 $(E_1 - E_2)$ l'ensemble des points de E_1 qui n'appartiennent pas à E_2. Il faut bien remarquer que E_2 contenant E_3, les ensembles

$$E_1 + (E_2 - E_3) \quad \text{et} \quad (E_1 + E_2) - E_3$$

diffèrent s'il existe des points communs à la fois à E_1, E_2 et E_3.

Ces définitions posées:

Nous nous proposons d'attacher à chaque ensemble borné un nombre positif ou nul que nous appellerons sa mesure et satisfaisant aux conditions suivantes :

1.° Il existe des ensembles dont la mesure n'est pas nulle.

2.° Deux ensembles égaux ont même mesure.

3.° La mesure de la somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles, sans points communs, deux à deux, est la somme des mesures de ces ensembles.

Nous ne résoudrons ce *problème de la mesure* que pour les ensembles que nous appellerons mesurables. Ce problème admet d'ailleurs des solutions différentes suivant que l'on se borne aux ensembles dont tous les points sont sur une droite, ou à ceux dont tous les points sont dans un plan, etc. Pour distinguer nous dirons, quand il sera nécessaire : mesure linéaire, mesure superficielle, etc.

Remarquons que si le problème de la mesure admet une solution, en multipliant toutes les mesures obtenues par un même nombre on a un autre système de mesures. Nous ne considèrerons pas comme différentes de telles solutions, de sorte que, sans nuire à la généralité, nous pourrons attribuer la mesure 1 à un ensemble quelconque de mesure non nulle.

I. Les éléments de l'ensemble sont les points d'une droite.

2. Supposons possible le problème de la mesure. Un ensemble formé d'un seul point a une mesure nulle car un ensemble borné contenant une infinité de points doit avoir une mesure finie. L'ensemble des points d'un segment MN a donc même mesure que M et N fassent ou non partie de l'ensemble; d'ailleurs MN ne peut avoir une mesure nulle sans qu'il en soit de même pour tout ensemble borné.

Choisissons un segment MN et attribuons lui 1 pour mesure. On sait que si l'on prend MN pour unité de longueur on peut attacher à chaque segment PQ un nombre, sa longueur; ce nombre est aussi la mesure de l'ensemble des points de PQ. Pour s'en convaincre il suffit de se rappeler que si la longueur l de PQ est commensurable et égale à $\frac{\alpha}{\beta}$ il existe un segment RS contenu α fois dans PQ et β fois dans MN et que si l est incommensurable, à tout nombre λ inférieur à l correspond un segment contenu dans PQ, et de longueur λ et à tout nombre λ supérieur à l un segment contenant PQ et de longueur λ.

Pour que la 3e condition du problème de la mesure soit remplie il faut que la longueur d'un segment somme d'un nombre fini ou d'une infinité d'autres segments, n'empiétant pas les uns sur les autres, soit la somme des longueurs de ces segments.

Des propriétés des longueurs il résulte qu'il en est bien ainsi si les segments composants sont en nombre fini; cela est encore vrai s'ils sont en nombre infini. (*Voir les Leçons sur la Théorie des fonctions*, de Mr Borel.)

3. Un ensemble E étant donné, on peut d'une infinité de manières enfermer ses points dans un nombre fini ou une infinité dénombrable d'intervalles. L'ensemble E_1 des points de ces intervalles contient E donc la mesures $m(E)$ de E est au plus égale à celle $m(E_1)$ de E_1, c'est à dire au plus égale à la somme des longueurs des intervalles considérés. La limite inférieure de cette somme est une limite supérieure de $m(E)$, nous l'appellerons la mesure extérieure de E, $m_e(E)$.

Supposons que tous les points de E appartiennent à un segment AB. Nous appellerons complémentaire de E par rapport à AB, $C_{AB}(E)$, l'ensemble $AB - E$. Puisque la mesure de $C_{AB}(E)$ est au plus $m_e[C_{AB}(E)]$ celle

de E est au moins $m(AB) - m_e[C_{AB}(E)]$. Ce nombre ne dépend pas de celui des segments AB contenant E choisi; nous l'appellerons la mesure intérieure de E, $m_i(E)$. Deux ensembles égaux ont des mesures intérieures égales et des mesures extérieures égales. D'ailleurs puisque l'on a:

$$m_e(E) + m_e[C_{AB}(E)] \geqq m(AB)$$

la mesure extérieure n'est jamais inférieure à la mesure intérieure. Si le problème de la mesure est possible, la mesure d'un ensemble E est comprise entre les deux nombres $m_e(E)$, $m_i(E)$ que nous venons de définir.

4. Nous appellerons *ensembles mesurables* (*) *ceux dont les mesures extérieure et intérieure sont égales*, la valeur commune de ces deux nombres sera la mesure de l'ensemble, si le problème de la mesure est possible. Des propriétés qui suivent il résultera que le nombre $m(E)$ ainsi défini satisfait bien aux conditions du problème de la mesure *si l'on s'astreint à ne considérer que des ensembles mesurables.*

La définition des ensembles mesurables est équivalente à celle ci: Un ensemble E est dit mesurable s'il est possible d'enserrer ses points dans des intervalles α, et ceux de son complémentaire dans des intervalles β de manière que la somme des longueurs des parties communes aux α et aux β soit aussi petite que l'on veut.

Soit un nombre fini ou une infinité dénombrable d'ensembles mesurables E_1, E_2,... montrons que l'ensemble somme E est mesurable.

Nous supposons tous les ensembles E_i formés des points d'un segment AB par rapport auquel nous prendrons les complémentaires. Enserrons les points de E_1 dans des intervalles α_1 n'empiétant pas les uns sur les autres et $C(E_1)$ dans des intervalles β_1; les parties communes aux α_1 et aux β_1 étant de longueur totale choisie arbitrairement ε_1. Enserrons E_2 dans des intervalles α_2 et $C(E_2)$ dans β_2 ayant en commun une longueur totale ε_2. Soient α'_2 et β'_2 les parties des α_2 et β_2 communes aux β_1. A E_3 correspondent des intervalles α_3, β_3 et un nombre ε_3, soient α'_3 et β'_3 les parties des α_3 et β_3 communes aux β'_2 et ainsi de suite.

Les points de E peuvent être enfermés dans les intervalles α_1, α'_2, α'_3,... Ceux de $C(E)$ peuvent être enserrés dans les intervalles β'_i, quel que soit i. Or ces deux séries d'intervalles ont des parties communes de longueur totale

(*) En adoptant cette définition nous modifions le langage qu'adopte M.r Borel.

au plus égale à

$$l_i = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_i + m(\alpha'_{i+1}) + m(\alpha'_{i+2}) + \cdots$$

La série $\Sigma\, m(\alpha'_i)$ est convergente, si donc on a choisi les ε_i de façon que la série $\Sigma\, \varepsilon_i$ soit convergente et ait ε pour somme, on pourra prendre i assez grand pour que l_i soit inférieur à $2\,\varepsilon$.

Donc E est sommable. — La somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles sommables étant un ensemble sommable, cela a bien un sens de poser le problème de la mesure seulement pour les ensembles mesurables.

Si les $E_1, E_2, \ldots$ n'ont deux à deux aucun point commun, les points de E_i sont intérieurs aux intervalles α'_i de sorte que $m(\alpha'_i) - m(E_i)$ est au plus égal à ε_i. Or $m(E)$ diffère de

$$m(\alpha_1) + m(\alpha'_2) + m(\alpha'_3) + \cdots$$

de moins de

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \cdots$$

donc on a:

$$m(E) = m(E_1) + m(E_2) + \cdots$$

et la 3.ème condition du problème de la mesure est remplie.

5. Le problème de la mesure est donc possible pour les ensembles mesurables; et il n'admet qu'une seule solution, car les raisonnements qui nous ont servi à définir les deux nombres m_e et m_i, appliqués à un ensemble mesurable, ne font intervenir que des ensembles mesurables.

Il n'est nullement démontré que le problème de la mesure soit impossible pour les ensembles (s'il en existe) dont les mesures intérieure et extérieure sont inégales. Mais dans la suite nous ne rencontrerons que des ensembles mesurables. En effet les procédés que nous emploierons pour définir un ensemble pourront toujours se ramener aux deux suivants.

1.° Faire la somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles précédemment définis.

2.° Considérer l'ensemble des points communs à un nombre fini ou une infinité dénombrable d'ensembles donnés;

et ces deux procédés appliqués à des ensembles mesurables donnent des ensembles mesurables. Nous l'avons vu pour le premier, démontrons le pour le second.

Soient E_1, $E_2 \ldots$ les ensembles donnés; l'ensemble cherché e_1 peut être défini comme ayant pour complémentaire la somme des complémentaires de E_1, $E_2 \ldots$, ce qui démontre la proposition.

Soit e_i l'ensemble analogue à e_1, relatif à la suite E_i, $E_{i+1} \ldots$; l'ensemble somme des e_i est formé des points communs à tous les E_i, au moins à partir d'une certaine valeur de i, variable d'ailleurs d'un point à l'autre; comme somme d'ensembles mesurables il est mesurable.

Voici une autre application du 2ème procédé. Soit E_1 contenant E_2, $E_1 - E_2$ est l'ensemble des points communs à E_1 et $C(E_2)$, donc si E_1 et E_2 sont mesurables, $E_1 - E_2$ l'est. D'ailleurs, puisque l'on a:

$$E_1 = (E_1 - E_2) + E_2$$

$$m(E_1 - E_2) = m(E_1) - m(E_2)$$

6. Puisque nous connaissons un ensemble mesurable, celui formé de tous les points d'un intervalle, les deux procédés précédents appliqués un nombre fini de fois nous permettent d'en définir de nouveaux. Ceux que l'on peut obtenir par cette méthode et leurs complémentaires sont ceux que M.r Borel appelle mesurables (*) et que nous nommerons *ensembles mesurables* (B). Ils sont définis par une infinité dénombrable de conditions, leur ensemble a la puissance du continu. Parmi ces ensembles il faut citer ceux qui sont des sommes d'intervalles et les ensembles fermés, c'est-à-dire contenant leur derivé (**), dont les complémentaires sont sommes d'intervalles.

L'ensemble E formé des points d'abcisses:

$$x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \cdots,$$

où les a_i sont égaux à 0 ou 2, étant parfait est mesurable (B). Son complémentaire est formé d'un intervalle $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ de longueur $\frac{1}{3}$, de deux intervalles $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$, $\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{9}, \frac{2}{3} + \frac{2}{9}\right)$ de longueur $\frac{1}{3^2}$, de quatre intervalles de longueur $\frac{1}{3^3}$, etc, donc a pour mesure

$$\frac{1}{3} + 2\frac{1}{3^2} + 2^2\frac{1}{3^3} + \cdots = 1$$

(*) *Leçons sur la théorie des fonctions*, pages 46 à 50.

(**) Ce sont ces ensembles que M.r Jordan appelle parfaits et M.r Borel relativement parfaits. Un tel ensemble contient sa frontière (laquelle sera définie plus loin).

et par suite E est de mesure nulle. E a la puissance du continu, donc on peut former avec les points de E une infinité d'ensembles qui tous, ayant une mesure extérieure nulle, sont mesurables. La puissance de l'ensemble de ces ensembles est celle de l'ensemble des ensembles de points; il existe donc des ensembles mesurables qui ne sont pas mesurables (B), et la puissance de l'ensemble des ensembles mesurables est celle de l'ensemble des ensembles de points.

7. Soit E un ensemble mesurable. Choisissons des nombres $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots$ décroissant jusqu'à zéro. On peut enfermer E dans une infinité dénombrable d'intervalles α_i de mesure $m(E) + \varepsilon_i$. L'ensemble E_1 des points qui font partie à la fois des ensembles $\alpha_1 \alpha_2 \ldots$ est mesurable (B), il a pour mesure $m(E)$ et contient E. L'ensemble $E_1 - E$ est de mesure nulle. On peut l'enfermer dans des intervalles β_i, contenus dans les α_i et de mesure ε_i. L'ensemble e des points communs à tous les β_i est mesurable (B) et de mesure nulle. L'ensemble $E_2 = E_1 - e$ est donc mesurable (B) et de mesure $m(E)$; de sorte que *tout ensemble mesurable est contenu dans un ensemble E_1 et contient un ensemble E_2, E_1 et E_2 étant mesurables* (B) *et de même mesure.* Les ensembles que nous appelons mesurables sont donc ceux que les procédés de M.r Borel permettent de mesurer, à condition de tenir compte des remarques énoncées à la fin de la page 48 (*) (loc. cit.).

D'une manière analogue on démontre que la mesure extérieure d'un ensemble E est la limite inférieure des mesures des ensembles mesurables contenant E et qu'il existe effectivement un ensemble mesurable (B) contenant E et de mesure $m_e(E)$. De même, $m_i(E)$ est la limite supérieure des mesures des ensembles mesurables contenus dans E et il existe effectivement un ensemble mesurable (B) contenu dans E ayant $m_i(E)$ pour mesure.

8. Dans son traité d'Analyse M.r Jordan donne les définitions suivantes. Un point M est point intérieur d'un ensemble E s'il est intérieur à un segment dont tous les points sont points de E. La frontière de E est l'ensemble des points qui ne sont intérieurs ni à E, ni à $C(E)$.

Divisons le segment AB qui porte E, en intervalles partiels. Soit l la somme des longueurs de ceux de ces intervalles dont tous les points sont in-

(*) « Cependant, si un ensemble E contient tous les éléments d'un ensemble mesurable E_1, de mesure α_1 nous pourrons dire que la mesure de E est supérieure à α_1 sans nous inquiéter si E est mesurable ou non. Inversement,... Les mots supérieure et inférieure n'excluent d'ailleurs pas l'égalité ».

térieurs à E et L la somme des longueurs de ceux qui contiennent des points de E ou de sa frontière. On démontre que, lorsque l'on fait varier d'une manière quelconque la division de AB, de façon que le maximum de la longueur des intervalles partiels tende vers zéro, les deux nombres l et L tendent vers des limites déterminées les *étendues intérieure et extérieure* de E. De cette définition il résulte que l'étendue extérieure est au moins égale à la mesure extérieure et que l'étendue intérieure est au plus égale à la mesure intérieure. M.r Jordan appelle mesurables les ensembles dont les deux étendues extérieure et intérieure sont égales; ces ensembles que nous nommerons *mesurables* (J) sont donc mesurables au sens que nous avons adopté et les deux définitions de la mesure concordent lorqu'elles sont toutes deux applicables.

On peut encore dire que l'étendue intérieure de E est la mesure de l'ensemble de ses points intérieurs, lequel ensemble étant ouvert (*), c'est-à-dire ne contenant aucun point de sa frontière, a pour complémentaire un ensemble fermé et par suite est mesurable (B). L'étendue extérieure de E est la mesure de l'ensemble somme de E et de sa frontière, lequel étant fermé est mesurable (B). Donc pour qu'un ensemble soit mesurable (J) il faut et il suffit que sa frontière soit de mesure nulle.

Un ensemble fermé, ayant pour étendue extérieure sa mesure, s'il est de mesure nulle on peut affirmer qu'il est mesurable (J). En particulier l'ensemble parfait défini au § 6 est mesurable (J); il en est de même de tous ceux que l'on peut former avec ses points, donc l'ensemble des ensembles mesurables (J) a même puissance que l'ensemble des ensembles de points, et il existe des ensembles mesurables (J) qui ne sont pas mesurables (B).

9. Nous venons d'attacher à certains ensembles une mesure, il nous reste à rechercher comment on peut calculer ce nombre. Cela dépend évidemment de la manière dont l'ensemble est donné.

Supposons qu'un intervalle quelconque (a, b) étant donné, on sache reconnaître s'il existe dans (a, b) des points de l'ensemble donné E ou de sa frontière, et s'il y existe des points de $C(E)$. Nous pourrons alors, par un nombre fini d'opérations, calculer un nombre quelconque de termes des deux suites (que l'on peut supposer l'une décroissante, l'autre croissante) dont les limites sont les étendues extérieure et intérieure de E. L'habitude que nous avons de manier les séries conduit à considérer les étendues comme bien définies.

(*) Tous les points d'un tel ensemble sont intérieurs à l'ensemble.

On sait donc calculer la mesure d'un ensemble mesurable (J) et la considération simultanée des deux suites permet d'avoir une limite supérieure de l'erreur commise en s'arrêtant à un terme quelconque.

Il est beaucoup plus difficile de calculer $m_e(E)$ et $m_i(E)$ pour un ensemble quelconque. Ces nombres sont en effet définis par la considération d'une infinité non dénombrable de nombres; pour trouver une suite de nombres tendant vers $m_e(E)$ il faudrait considérer des divisions du segment AB portant E, en intervalles partiels qui dépendraient de l'ensemble E.

Si un ensemble est mesurable (B) et est défini à l'aide des deux opérations que nous avons indiquées à partir de suites d'intervalles, il est facile de calculer sa mesure en s'appuyant sur la 3ème condition du problème de la mesure et sur cette propriété: l'ensemble E des points communs à tous les ensembles mesurables $E_1 E_2 \ldots$ qui sont tels que chacun contient tous ceux qui le suivent, est la limite inférieure de la suite $m(E_1)$, $m(E_2)\ldots$

En effet $C(E)$ est la somme des ensembles, sans point commun, deux à deux, $C(E_1)$, $[C(E_2) - C(E_1)]$, $[C(E_3) - C(E_2)]\ldots$

Donc

$$m[C(E)] = m[C(E_1)] + m[C(E_2) - C(E_1)] + \cdots$$

et

$$m(E) = m(E_1) + [m(E_2) - m(E_1)] + \cdots$$

II. Les elements de l'ensemble sont les points d'un plan.

10. Les considérations précédentes s'étendent sans peine aux ensembles dont les éléments sont les points d'un espace à plusieurs dimensions; nous nous bornerons au cas du plan.

En raisonnant comme au § 2 on voit que tout ensemble borné de points sur une droite a une mesure superficielle nulle et que l'ensemble des points d'un carré ne peut avoir 0 pour mesure. Attribuons donc arbitrairement 1 pour mesure à un carré $MNPQ$.

Les raisonnements que l'on emploie en géométrie élémentaire pour trouver l'aire d'un triangle, prouvent que la mesure de l'ensemble des points d'un triangle ne peut différer de la moitié du produit des nombres qui mesurent son côté et sa hauteur, MN étant l'unité de longueur.

La mesure d'un triangle étant ainsi définie, il faut démontrer que *la mesure d'un triangle, somme de triangles n'empiétant pas les uns sur les autres, est la somme des mesures de ces triangles.*

Les raisonnements exposés par M.r Hadamard dans la note D de sa *Géométrie élémentaire* prouvent qu'il en est bien ainsi si les triangles composants sont en nombre fini. Le cas où ils sont en nombre infini se traite par un raisonnement semblable à celui qui nous a été utile dans le cas des ensembles de points sur une droite (Borel, *Théorie des fonctions*, page 42).

11. Nous pouvons maintenant donner les définitions analogues à celles du § 3.

La mesure extérieure $m_e(E)$ d'un ensemble E est la limite inférieure de la somme des mesures des triangles (en nombre fini ou infini) dans lesquels on peut enfermer les points de E.

E étant intérieur à un triangle $A\,B\,C$, par définition

$$C_{ABC}(E) = (A\,B\,C) - E.$$

La mesure intérieure de E sera, par définition

$$m_i(E) = m(A\,B\,C) - m_e[C_{ABC}(E)].$$

Un ensemble pour lequel les deux nombres ainsi définis sont égaux sera dit mesurable, et la valeur commune de ces nombres sera sa mesure.

On démontre comme au § 4 que le problème de la mesure est possible et n'admet qu'une solution quand on se borne aux ensembles mesurables; et que les deux procédés du § 5 appliqués à des ensembles mesurables donnent des ensembles mesurables. Ces deux procédés, appliqués un nombre fini de fois à des ensembles dont chacun est formé des points d'un triangle, donnent les ensembles plans que nous appellerons, ainsi que leurs complémentaires, ensembles mesurables (B).

Soit un ensemble ouvert E, chacun de ses points M est intérieur à E. Nous pouvons donc à M faire correspondre un carré ayant M pour centre, de côtés parallèles à des directions rectangulaires données, et défini comme étant le plus grand dont tous les points intérieurs sont intérieurs à E. E étant somme de ceux de ces carrés qui correspondent aux points dont les deux coordonnées sont rationnelles, est mesurable (B).

Le complémentaire d'un ensemble fermé est un ensemble ouvert, donc tout ensemble fermé est mesurable (B).

On définira les étendues extérieure et intérieure d'un ensemble comme dans le cas de la droite, une division de la portion de droite contenant l'ensemble en un nombre fini de segments étant remplacée par une division en un nombre fini de carrés de la portion de plan contenant l'ensemble. De là la notion d'ensemble mesurable (J).

Tous ces ensembles et tous ces nombres ont entre eux les mêmes rapports que les ensembles et les nombres de mêmes noms rencontrés précédemment.

III. Le problème des aires (*).

12. On sait que l'on appelle courbe plane l'ensemble des deux équations

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \tag{1}$$

f et φ étant continues dans l'intervalle (a, b) *fini* où elles sont définies. A chaque valeur de t on peut faire correspondre le point dont les coordonnées sont les valeurs correspondantes de x et y. Une courbe définit donc un ensemble de points, cet ensemble est parfait (**). Un point est dit multiple s'il correspond à plusieurs valeurs de t. Dans le cas d'une courbe sans point multiple la connaissance de l'ensemble des points de la courbe suffit à la définir, car on ne considère pas comme différentes la courbe (1) et celles qu'on en déduit en remplaçant t par une fonction $\theta(t)$ toujours croissante ou toujours décroissante.

Une courbe est dite fermée sans point multiple si elle n'a d'autre point multiple qu'un point double correspondant à $t = a$ et $t = b$. On considère cette courbe comme définie par l'ensemble de ses points. Une telle courbe étant donnée, on sait qu'elle divise le plan en deux régions l'une intérieure, l'autre extérieure (***).

Nous appellerons *domaine* l'ensemble des points à l'intérieur d'une courbe fermée C sans point multiple. C est la frontière du domaine, lequel est un

(*) Jordan, Tome I. — J. Hadamard, *Géométrie Elémentaire*.

(**) Il n'en serait pas ainsi si, comme cela se présente souvent en mécanique, l'intervalle (a, b) était infini.

(***) Jordan, *Cours d'Analyse*, 2ème Edition, Tome I, pages 90 à 100.

ensemble ouvert. Nous dirons qu'un domaine D est somme des domaines D_1, D_2,... en nombre fini ou non, si tout point de D appartient à un et un seul des D_i, ou bien à l'une au moins des frontières des D_i.

13. *Nous nous proposons d'attacher à chaque domaine un nombre positif que nous appellerons son aire et satisfaisant aux conditions suivantes :*

1.° *Deux domaines égaux ont même aire.*

2.° *L'aire d'un domaine somme d'un nombre fini ou infini d'autres domaines est la somme des aires de ces domaines.*

C'est *le problème des aires.*

Si ce problème est possible, il l'est d'une infinité de manières et l'on peut attribuer arbitrairement 1 pour aire à un carré $MNPQ$. Les raisonnements connus de la géométrie élémentaire prouvent que l'aire d'un rectangle ne peut différer du produit des longueurs de ses côtés, MN étant l'unité de longueur, c'est-à-dire de la mesure superficielle du rectangle.

Un domaine étant un ensemble ouvert est, comme nous l'avons vu, somme d'une infinité dénombrable de rectangles, dont on peut supposer qu'ils n'empiètent pas les uns sur les autres; donc son aire ne peut différer de la somme des aires de ces rectangles, c'est-à-dire de la mesure superficielle du domaine considéré comme ensemble de points.

Soient maintenant deux domaines D_1 et D_2 sans point commun, ayant en commun un arc de frontière $\alpha\beta$, et un seul. Le domaine D — somme de l'ensemble des points de D_1, de l'ensemble des points de D_2, de l'ensemble des points de $\alpha\beta$ (autres que α et β), — a pour mesure la somme des mesures de ces trois ensembles, qui sont tous trois mesurables puisque les deux premiers sont ouverts et que le troisième est parfait, aux points α et β près. Pour que la 2ème condition du problème des aires soit remplie il faut donc que la mesure superficielle de l'arc $\alpha\beta$ soit nulle.

Le problème des aires n'est donc possible que si l'on ne considère que les domaines dont la frontière est de mesure superficielle nulle.

Nous appellerons ces domaines *domaines quarrables* et les courbes dont la mesure superficielle est nulle *courbes quarrables.*

Soit un domaine quarrable D, somme des domaines quarrables D_1, D_2,... L'ensemble des points de D contient la somme des ensembles sans point commun deux à deux $D_1 D_2$... et comme aucun des D_i n'a une mesure nulle ils forment au plus une infinité dénombrable. Les frontières ont une mesure superficielle nulle, on peut les négliger dans le calcul de la mesure ou aire de D.

Le problème des aires est donc possible pour les domaines quarrables et il n'admet qu'une seule solution, si l'on fixe l'unité d'aire.

14. Nous allons supposer maintenant que la 2ème condition du problème des aires est ainsi modifiée :

L'aire d'un domaine somme de deux autres est la somme des aires de ces deux autres (*).

En reprenant des raisonnements déjà employés on verra que l'aire d'un domaine D est comprise entre les étendues intérieure et extérieure de ce domaine. De sorte que l'aire d'un domaine quarrable est encore bien déterminée.

L'aire d'un domaine D non quarrable, limité par une courbe non quarrable C est comprise entre les nombres $m(D)$ et $m(D)+m(C)$ (**).

Montrons que le problème des aires ainsi posé est indéterminé pour les domaines non quarrables. Nous nous appuierons sur cette propriété : lorsque deux domaines D_1, D_2 ont en commun un arc de frontière $\alpha\beta$, on peut trouver un domaine D contenant $\alpha\beta$ (sans peut-être α et β) et tel que, ou bien tout point de D intérieur à D_1 est intérieur à D_2 et inversement, ou bien tout point de D intérieur à D_1 n'appartient pas à D_2 et inversement (***). Dans le premier cas nous dirons que D_1 et D_2 sont du même côté de $\alpha\beta$ et dans le second qu'ils sont de côtés différents.

Soit un arc de courbe $\alpha\beta$, sans point multiple et non quarrable, supposons qu'il fasse partie de la frontière d'un domaine Δ. Soit maintenant un domaine quelconque D limité par une courbe C. C et $\alpha\beta$ peuvent avoir des arcs en commun (nous négligeons les points communs, s'il en existe, ne faisant pas partie de tels arcs). Soit E l'ensemble de ceux de ces arcs le long desquels D et Δ sont d'un même côté de $\alpha\beta$ et E_1 l'ensemble des arcs pour lesquels cela n'est pas. Choisissons arbitrairement, une fois pour toutes, un

(*) C'est ainsi que M.r Hadamard pose le problème des aires pour les polygones. (*Géométrie Elémentaire*, Note *D*.)

(**) Il existe des courbes non quarrables puisqu'il existe des courbes passant par tous les points d'un carré. Pour former une courbe non quarrable, sans point multiple il suffit de modifier légèrement la méthode qu'emploie M.r Hilbert pour définir une courbe passant par tous les points d'un carré (*Mathematische Annalen*, Bd. 38 ou Picard, *Traité d'Analyse*, 2.e Edition, Tome I). On remplacera chacun des carrés qui figure dans la définition de M.r Hilbert par un polygone intérieur à ce carré, d'aire assez grande, choisi de façon que les frontières de deux de ces polygones n'aient en commun que le sommet, s'il existe, par lequel la courbe passe de l'un dans l'autre.

(***) La démonstration n'offre aucune difficulté.

nombre θ compris entre 0 et 1. Nous attribuerons à D l'aire:

$$m(D) + \frac{1}{2} m(C - E - E_1) + \theta\, m(E) + (1 - \theta)\, m(E_1).$$

On démontrera très facilement que l'aire ainsi définie vérifie la seconde condition du problème des aires, telle qu'elle a été posée au début de ce paragraphe (*).

En résumé le problème des aires n'est à la fois possible et bien déterminé que pour les domaines quarrables. Dans la suite nous ne parlerons d'aire que dans le cas d'un domaine quarrable.

Des raisonnements analogues aux précédents pourront être faits au sujet des *volumes des domaines* de l'espace ordinaire, et d'une façon plus générale de l'*étendue d'un domaine* d'un espace à un nombre quelconque de dimensions.

CHAPITRE II.

Intégrale.

I. Integrale definie des fonctions d'une variable.

15. Au point de vue géométrique le problème de l'intégration peut se poser ainsi:

Étant donnée une courbe C par son équation $y = f(x)$ (f est une fonction continue positive, les axes sont rectangulaires) trouver l'aire du domaine limité par un arc de C, un segment de $0x$ et deux parallèles à l'axe des y d'abcisses données a et b, $(a < b)$.

Cette aire s'appelle l'intégrale définie de f prise entre les limites a et b, elle se représente par $\int_a^b f(x)\,dx$.

Archimède en quarrant un segment de parabole a résolu un cas particulier de ce problème. La méthode classique applicable au cas général con-

(*) Il faudra pour cela s'appuyer sur cette propriété: Si un domaine est somme de deux domaines D_1 et D_2, D_1 et D_2 ont en commun un arc de frontière et un seul, et aucun point commun en dehors de cet arc.

siste essentiellement à évaluer les étendues intérieure et extérieure du domaine à l'aide d'une division du plan en rectangles dont les côtés sont parallèles à $0x$ et $0y$. Pour avoir ces rectangles traçons d'abord des parallèles à $0y$, puis divisons les bandes obtenues par des segments parallèles à $0x$, d'ordonnées variables d'une bande à l'autre. Si l'un R_1 des rectangles R ainsi formés doit être considéré pour calculer l'une des étendues, tous les rectangles R situés dans la même bande et compris entre R_1 et $0x$ doivent aussi être considérés pour le calcul de la même étendue. Les étendues sont donc des limites de sommes d'aires de rectangles ayant leurs bases sur $0x$.

Soient δ_1, δ_2... les longueurs de ces bases; m_1, m_2..., M_1, M_2... les valeurs inférieures et supérieures de f dans les intervalles correspondants. Si l'on suppose les δ donnés, c'est-à-dire les parallèles à $0y$ tracées, et si l'on choisit les segments parallèles à $0x$ de manière à obtenir les valeurs les plus approchées possibles pour les étendues, on obtiendra pour ces valeurs approchées :

$$s = \Sigma\,\delta_i\,m_i \qquad S = \Sigma\,\delta_i\,M_i\,.$$

Ainsi on sait calculer les deux étendues du domaine; on démontre qu'elles sont égales, le problème que nous nous sommes posé a donc un sens et nous savons le résoudre.

Relativement aux fonctions f bornées quelconques M.r Darboux a démontré (*) que les deux sommes s et S tendent vers des limites parfaitement déterminées; on les appelle *intégrales par défaut* et *par excès*. Lorsque ces deux intégrales sont égales, et cela se présente pour d'autres fonctions que les fonctions continues, la fonction est dite *intégrable* et la limite commune de s et S est appelée depuis Riemann (**) *l'intégrale définie de f prise entre a et b.*

16. Pour interpréter géométriquement ces nombres, attachons à toute fonction f positive définie dans (a, b) l'ensemble E des points dont les coordonnées vérifient à la fois les deux inégalités

$$a \leq x \leq b \qquad 0 \leq y \leq f(x).$$

(*) Darboux, *Mémoire sur les fonctions discontinues.* Annales de l'Ecole Normale, 1875.

(**) Riemann, *Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique.*

Les deux sommes s et S sont évidemment des valeurs approchées des étendues intérieure et extérieure de E et par suite s et S ont des limites bien déterminées: ces étendues. Ainsi, au point de vue géométrique, l'existence des intégrales par défaut et par excès est une conséquence de l'existence des étendues intérieure et extérieure d'un ensemble borné. — Pour que la fonction f soit intégrable il faut et il suffit que E soit mesurable (J); la mesure de E est l'intégrale.

Si la fonction f est de signe quelconque, nous lui faisons correspondre l'ensemble E des points dont les coordonnées vérifient les trois inégalités

$$a \leqq x \leqq b \qquad x\, f(x) \geqq 0 \qquad 0 \leqq y^2 \leqq \overline{f(x)}^2.$$

L'ensemble E est somme de deux ensembles E_1 et E_2 formés des points à ordonnées positives pour E_1 et négatives pour E_2 (*). L'intégrale par défaut est l'étendue intérieure de E_1 moins l'étendue extérieure de E_2; l'intégrale par excès est l'étendue extérieure de E_1 moins l'étendue intérieure de E_2. Si E est mesurable (J) (auquel cas E_1 et E_2 le sont) la fonction est intégrable, l'intégrale étant $m(E_1) - m(E_2)$.

17. Ces résultats suggèrent immédiatement la généralisation suivante: *si l'ensemble E est mesurable, (auquel cas E_1 et E_2 le sont) nous appellerons intégrale définie de f, prise entre a et b, la quantité*

$$m(E_1) - m(E_2).$$

Les fonctions f correspondantes seront dites sommables.

Relativement aux fonctions non sommables, s'il en existe, nous définirons les intégrales inférieure et supérieure comme égales à

$$m_i(E_1) - m_e(E_2) \qquad m_e(E_1) - m_i(E_2).$$

Ces deux nombres sont compris entre les intégrales par défaut et par excès.

18. Nous allons définir analytiquement les fonctions sommables.

Puisque E est mesurable il est contenu dans un ensemble E' et contient un ensemble E'', E' et E'' étant mesurables (B) et de mesure $m(E)$, § 7. D'ailleurs les raisonnements qui nous ont donné ce résultat prouvent que l'on peut supposer E' et E'' formés de segments parallèles à $0y$ et ayant leurs pieds sur $0x$, c'est-à-dire correspondant à deux fonctions f_1 et f_2 $(f_1 \geqq f_2)$.

(*) Il importe peu de considérer les points de l'axe des x comme faisant partie de E_1 ou de E_2.

Soient e, e', e'' les ensembles formés de ceux des points de E, E', E'' dont les ordonnées sont plus grandes qu'un nombre donné $m > 0$; e, e', e'' sont mesurables et de même mesure. Soient s, s', s'' les sections de ces ensembles par la droite $y = m + h$; s' et s'' sont mesurables (B) linéairement, et $m(s')$, $m(s'')$ ne décroissent pas quand h tend vers zéro; soient S', S'' leurs limites. Montrons qu'elles sont égales. — En effet, s'il en était autrement pour h assez petit on aurait toujours

$$m(s') \geqq m(s'') + \varepsilon.$$

Et l'on peut trouver h_1 et h_2, $h_1 < h_2$, assez petits pour que

$$m[s'(h_1)] \geqq m[s'(h_2)] \geqq m[s''(h_1)] + \frac{\varepsilon}{2}\cdot$$

Soient e'_1, e''_1 les points de e' et e'' compris entre $y = h_1$ et $y = h_2$ on a :

$$m(e'_1) \geqq (h_2 - h_1) \,.\, m[s'(h_2)]$$

$$m(e''_1) \leqq (h_2 - h_1) \,.\, m[s''(h_1)].$$

Donc

$$m(e'_1) \geqq m(e''_1) + (h_2 - h_1)\frac{\varepsilon}{2}$$

ce qui est impossible car e'_1 et e''_1 doivent avoir la même mesure.

Donc s' et s'' ont même mesure linéaire et par suite s est mesurable; c'est-à-dire que l'*ensemble des valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ est supérieure à $m > 0$ est mesurable.* De même *l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ est inférieure à $m < 0$ est mesurable.*

De là résulte que l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ est inférieure ou égale à $m > 0$ (supérieure ou égale à $m < 0$) est mesurable; donc que l'ensemble des points pour lesquels on a soit $a \geqq f(x) > b > 0$, soit $0 > c > f(x) \geqq d$, soit $e \geqq f(x) \geqq g$ $(e\, g < 0)$ est mesurable; et en faisant tendre b vers a, ou d vers c, ou e et g vers 0 on voit que l'ensemble des points pour lesquels y a une valeur donnée est mesurable. En résumé, sans qu'il soit nécessaire de s'occuper des signes de a et b, *si f est sommable, l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles on a :*

$$a > f(x) > b$$

est mesurable.

19. Réciproquement: *si quels que soient a et b l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles on a $a > f(x) > b$ est mesurable, et si la fonction $f(x)$ est bornée, elle est sommable.*

En effet, divisons l'intervalle de variation de $f(x)$; soient $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ les points de division. Soit e_i $(i = 0, 1, \ldots n)$ l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $f(x) = a_i$.

Soit e'_i $(i = 0, 1, 2, \ldots n-1)$ l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $a_i < f(x) < a_{i+1}$.

Les points de l'ensemble E attaché à $f(x)$, correspondant aux valeurs de x qui appartiennent à e_i forment un ensemble mesurable dans le plan et de mesure $|a_i| \cdot m_l(e_i)$, ($m_l(e_i)$ désignant une mesure linéaire).

Les points de E qui correspondent à ceux de e'_i forment un ensemble contenant un ensemble mesurable de mesure $|a_i| \cdot m_l(e'_i)$, et contenu dans un ensemble mesurable de mesure $|a_{i+1}| m_l(e'_i)$.

E contient donc un ensemble de mesure

$$\sum_0^n |a_i| m_l(e_i) + \sum_1^n |a_{i-1}| m_l(e'_i)$$

et est contenu dans un ensemble de mesure

$$\sum_0^n |a_i| m_l(e_i) + \sum_1^n |a_i| m_l(e'_i).$$

Ces deux mesures diffèrent de moins de $(a_n - a_0)\alpha$ en appelant α le maximum de $a_i - a_{i-1}$, donc on peut les rendre aussi voisines que l'on veut et E est mesurable, donc f sommable.

De plus on sait calculer la mesure de E; donc, *si f est positive l'intégrale est la limite commune des deux sommes*

$$\sigma = \sum_0^n a_i m_l(e_i) + \sum_1^n a_{i-1} \cdot m_l(e'_i), \qquad \Sigma = \sum_0^n a_i m_l(e_i) + \sum_1^n a_i m_l(e'_i)$$

lorsque $a_{i-1} - a_i$ tend vers zéro.

Or si f n'est pas toujours positive la limite de la somme de ceux des termes de σ ou Σ qui sont positifs donne la mesure de l'ensemble que nous avons appelé E_1 § 16, et la limite de la somme des termes négatifs donne $-m(E_2)$, donc *dans tous les cas σ et Σ définissent l'intégrale.*

20. Il n'est peut-être pas inutile de montrer que des raisonnements analytiques auraient pu nous conduire à la considération des fonctions sommables et de ce que nous venons d'appeler leurs intégrales.

Soit une fonction continue toujours croissante $f(x)$ définie entre α et β $(\alpha < \beta)$ et variant entre a et b $(a < b)$. Prenons arbitrairement pour x les valeurs

$$x_0 = \alpha < x_1 < x_2 \ldots < x_n = \beta$$

auxquelles correspondent pour $f(x)$ les valeurs

$$a_0 = a < a_1 < a_2 \ldots < a_n = b.$$

L'intégrale définie, au sens ordinaire du mot, est la limite commune des deux sommes

$$\sum_1^n (x_i - x_{i-1})\, a_{i-1} \qquad \sum_1^n (x_i - x_{i-1})\, a_i$$

quand le maximum de $x_i - x_{i-1}$ tend vers zéro.

Mais x_i est donné si a_i l'est, et $x_i - x_{i-1}$ tend vers zéro si $a_i - a_{i-1}$ tend vers zéro. Donc *pour définir l'intégrale d'une fonction continue croissante $f(x)$ on peut se donner les a_i, c'est-à-dire la division de l'intervalle de variation de $f(x)$, au lieu de se donner les x_i, c'est-à-dire la division de l'intervalle de variation de x.*

En cherchant à opérer de même, d'abord dans le cas simple des fonctions continues variables dans tout intervalle, et n'ayant qu'un nombre fini de maxima et minima, puis dans le cas d'une fonction continue quelconque on est facilement conduit à cette propriété. Soit une fonction continue $f(x)$ définie dans (α, β) et variant entre a et b, $(a < b)$. Choisissons arbitrairement

$$a = a_0 < a_1 < a_2 \ldots < a_n = b\,;$$

$f(x) = a_i$ pour les points d'un ensemble fermé e_i, $(i = 0, 1 \ldots n)$; $a_i < f(x) < a_{i+1}$ pour les points d'un ensemble, somme d'intervalles, e'_i, $(i = 0, 1, 2 \ldots, n-1)$; les ensembles e_i et e'_i sont mesurables.

Les deux quantités

$$\sigma = \sum_0^n a_i\, m(e_i) + \sum_1^n a_i\, m(e'_i), \qquad \Sigma = \sum_0^n a_i\, m(e_i) + \sum_1^n a_{i+1}\, m(e'_i)$$

tendent vers $\int_a^b f(x)\,dx$ quand le nombre des a_i augmente de façon que le maximum de $a_i - a_{i-1}$ tende vers zéro.

Cette propriété obtenue, on peut la prendre pour définition de l'intégrale de $f(x)$. Mais les deux quantités σ et Σ ont un sens pour d'autres fonctions

que les fonctions continues, ce sont les fonctions sommables. Nous allons démontrer que pour ces fonctions σ et Σ ont une même limite indépendante du choix des a_i; cette limite sera, par définition, l'intégrale de $f(x)$ prise entre α et β.

Lorsque, entre les a_i, on introduit de nouveaux points de division, σ ne décroît pas, Σ ne croît pas, donc σ et Σ ont des limites. Elles sont égales, car $\Sigma - \sigma$ est au plus égal à $(\beta - \alpha)$ multiplié par le maximum de $(a_i - a_{i-1})$.

Soit maintenant un autre mode de division de la variation de $f(x)$ à l'aide de points b_i et soient σ' et Σ' les valeurs correspondantes de σ et Σ. Soient σ'' et Σ'' les valeurs correspondant au mode de division dans lequel on emploie à la fois les a_i et b_i. Les deux séries d'inégalités

$$\sigma \leq \sigma'' \leq \Sigma'' \leq \Sigma'$$

$$\sigma' \leq \sigma'' \leq \Sigma'' \leq \Sigma$$

prouvent que les six sommes σ, σ', σ'', Σ, Σ', Σ', ont la même limite.

L'existence de l'intégrale est donc démontrée. Si l'on adopte cette méthode d'exposition, d'ailleurs peu différente de la précédente, il n'est pas évident que la définition de l'intégrale telle que l'a donnée Riemann n'est jamais en désaccord avec la précédente. Pour le démontrer nous nous appuierons sur ce fait: Les points de discontinuité d'une fonction intégrable forment un ensemble de mesure nulle (*). — Soit $f(x)$ une fonction intégrable et soit E l'ensemble des points pour lesquels on a

$$a \leq f(x) \leq b$$

a et b étant deux nombres quelconques. Les points limites de E qui ne font pas partie de E sont des points de discontinuité; ils forment donc un ensemble e de mesure nulle. $E + e$ étant fermé est mesurable, e est mesurable, donc E l'est. Cela suffit pour qu'on en conclut que f est sommable.

Si dans un intervalle de longueur l, le maximum de f est M et le minimum m, l'intégrale (au sens que nous avons donné à ce mot) est comprise entre lM et lm. De plus si $a_1, a_2, \ldots a_n$ sont des nombres croissants, on a:

$$\int_{a_1}^{a_2} + \int_{a_2}^{a_3} + \cdots + \int_{a_{n-1}}^{a_n} = \int_{a_1}^{a_n}$$

(les intégrales ayant le sens que nous avons adopté).

(*) Riemann énonce cette propriété de la façon suivante: Pour qu'une fonction soit intégrable il faut que « la somme totale des intervalles, pour lesquels les oscillations sont plus grandes que σ, quel que soit σ, puisse être rendue infiniment petite ».

De là résulte que l'intégrale d'une fonction sommable est comprise entre les intégrales par défaut et par excès, et en particulier que les deux définitions de l'intégrale concordent lorsqu'elles sont toutes deux applicables.

21. L'intégrale prise entre les limites a et b n'a été définie que si a est inférieur à b, nous complèterons la définition par l'identité

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = 0.$$

De là résulte que l'on a :

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx + \cdots + \int_k^l f(x)\,dx = \int_a^l f(x)\,dx$$

et cela quels que soient a, $b \ldots l$.

Nous aurons aussi besoin de la notion d'intégrale d'une fonction f définie seulement pour les points d'un ensemble E (*). Soit un segment AB contenant E, définissons une fonction φ comme égale à f pour les points de E et à 0 pour les points de $C_{AB}(E)$. L'intégrale de f prise dans E est, par définition, l'intégrale de φ prise dans AB. Il est évident que l'intégrale de f ainsi définie ne dépend pas du choix du segment AB contenant E.

Si E est somme de E_1, $E_2 \ldots$, tous ces ensembles étant mesurables et sans point commun deux à deux, et si la fonction f est sommable dans E, on a :

$$\int_E f(x)\,dx = \Sigma \int_{E_i} f(x)\,dx.$$

Remarquons encore que l'on peut définir l'intégrale inférieure d'une fonction f comme la limite supérieure des intégrales des fonctions φ sommables non supérieures à f; il existe une de ces fonctions φ dont l'intégrale est égale à l'intégrale inférieure de f. On énoncerait une propriété analogue pour l'intégrale supérieure.

22. Nous allons maintenant montrer que les opérations arithmétiques élémentaires appliquées à des fonctions sommables donnent des fonctions sommables.

(*) On aurait pu d'abord définir les fonctions sommables dans E, puis leurs intégrales à l'aide des mêmes définitions que précédemment, à condition de faire abstraction de tous les points qui n'appartiennent pas à E.

Soient f et φ deux fonctions sommables qui restent comprises entre m et M. Partageons l'intervalle (m, M); soient les points de division

$$m_0 = m < m_1 < m_2 \ldots < m_n = M.$$

Soit $e_i (i = 1, 2 \ldots n)$ l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles on a : $m_{i-1} < f \leq m_i$, soit e'_i l'ensemble correspondant pour φ.

Soit e_{ij} l'ensemble des points communs à e_i et e'_j, pour les points de cet ensemble on a :

$$m_{i-1} + m_{j-1} < f + \varphi \leq m_i + m_j ;$$

e_i, e'_j, e_{ij} sont mesurables.

Soient a et b deux nombres donnés. Soit E l'ensemble somme de ceux des e_{ij} dont tous les points sont compris *entre a* et *b*. E est mesurable.

Augmentons indéfiniment le nombre des m_i de façon que le maximum de $m_i - m_{i-1}$ tende vers zéro. Nous aurons une suite infinie d'ensembles E dont la somme, qui est mesurable, est l'ensemble de valeurs de x pour lesquelles on a :

$$a < f + \varphi < b$$

donc $f + \varphi$ est sommable.

L'intégrale de f est la somme des intégrales de f prises dans les ensembles e_{ij}, donc on a :

$$\Sigma\, m\,(e_{ij})\, m_{i-1} < \int f(x)\, d\,x < \Sigma\, m\,(e_{ij})\, m_i\,.$$

De même

$$\Sigma\, m\,(e_{ij})\, m_{j-1} < \int \varphi\,(x)\, d\,x < \Sigma\, m\,(e_{ij})\, m_j\,.$$

Et, en raisonnant de même pour la fonction $f + \varphi$,

$$\Sigma\, m\,(e_{ij})\,(m_{i-1} + m_{j-1}) < \int (f + \varphi)\, d\,x < \Sigma\, m\,(e_{ij})\,(m_i + m_j).$$

De là résulte que :

$$\left| \int (f + \varphi)\, d\,x - \int f\, d\,x - \int \varphi\, d\,x \right| < \Sigma\, m\,(e_{ij})\,(m_i + m_j - m_{i-1} - m_{j-1})$$

donc

$$\int (f + \varphi)\, d\,x = \int f\, d\,x + \int \varphi\, d\,x\ (*).$$

(*) L'introduction des notions d'intégrales inférieure et extérieure aurait permis de se borner à la 2ème partie du raisonnement précédent.

Cette propriété se généralise immédiatement, de sorte que: *la somme d'un nombre quelconque de fonctions sommables est une fonction sommable et l'intégrale est la somme des intégrales.*

On démontrera de même que *le produit de deux fonctions sommables est une fonction sommable;* que *l'inverse d'une fonction sommable f vérifiant l'inégalité*

$$0 < m < |f| < M$$

est une fonction sommable; que *la racine $m^{ième}$ arithmétique d'une fonction f sommable, pour laquelle cette racine existe, est sommable;* que *si f et φ sont deux fonctions sommables, telles que $f(\varphi)$ ait un sens, la fonction $f(\varphi)$ est sommable; de même $f\varphi$ est sommable si f et φ le sont*, etc.

Une proposition plus importante est la suivante: *Si une fonction f bornée est la limite d'une suite de fonctions f_i sommables, f est sommable.*

En effet soit e_i l'ensemble des valeurs pour lesquelles f_i est comprise *entre* a et b. L'ensemble e des points communs à tous les e_i, au moins à partir d'une certaine valeur de i, est l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles f est comprise *entre* a et b. Or les e_i étant mesurables e l'est, donc f est sommable.

23. Les propositions que nous venons d'obtenir permettent de définir une classe importante de fonctions sommables.

Nous nous appuierons sur ce fait que $y = h$ et $y = x$ sont des fonctions sommables; alors kx^m est sommable et tout polynome est sommable.

Depuis Weierstrass on sait que toute fonction continue est la limite d'une suite de polynomes, donc les fonctions continues sont sommables. Mais il existe des fonctions autres que les fonctions continues qui sont limites de polynomes, ce sont les fonctions qu'a étudiées M.r Baire et qu'il a appelées fonctions de première classe. (*Sur les fonctions de variables réelles*, Annali di Matematica, 1899.) Les fonctions de première classe sont donc sommables. Les limites de fonctions de première classe ou fonctions de seconde classe sont sommables, etc. Toutes les fonctions de l'ensemble que M.r Baire désigne par E (page 70, loc. cit.) sont sommables.

Ces résultats nous fournissent de nombreux exemples de fonctions sommables, discontinues et non intégrables (au sens de Riemann). On peut d'ailleurs obtenir de tels exemples de la façon suivante. — Le raisonnement qui nous a permis au paragraphe 20 de démontrer que toute fonction intégrable est sommable prouve que: Si, en faisant abstraction d'un ensemble de mesure

nulle, il reste un ensemble en chaque point duquel une fonction est continue, cette fonction est sommable. Donc si f et φ sont deux fonctions continues, la fonction F, définie comme égale à f sauf aux points d'un ensemble E de mesure nulle, pour lesquels on a

$$F = f + \varphi,$$

est sommable. Or si φ n'est jamais nulle et si E est dense dans tout intervalle, tous les points sont points de discontinuité pour F qui n'est donc pas intégrable (au sens de Riemann).

Ce procédé nous permet de construire des fonctions sommables formant un ensemble dont la puissance est égale à celle de l'ensemble des fonctions.

24. La méthode géométrique qui nous a servie au début de ce chapitre, étant basée sur la notion de mesure d'un ensemble borné, ne s'appliquait qu'aux fonctions bornées (*). Au contraire la méthode analytique indiquée au § 20 s'applique presque sans modification à des fonctions non limitées supérieurement en valeur absolue.

Une fonction sera dite sommable si, quels que soient a et b, l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles on a

$$a < f(x) < b$$

est mesurable. Nous distinguerons les fonctions sommables bornées, celles dont nous nous sommes occupés, jusqu'à présent, et les fonctions sommables non bornées.

Soit $f(x)$ une fonction sommable. Choisissons des nombres

$$\ldots < m_{-2} < m_{-1} < m_0 < m_1 < m_2 < \ldots$$

variant depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$ et tels que $m_i - m_{i-1}$ soit limité supérieurement en valeur absolue. Soit toujours e_i l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ égale m_i et e'_i l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles

$$m_i < f(x) < m_{i+1}\,.$$

Considérons les deux sommes

$$\sigma = \Sigma\, m_i \,.\, m(e_i) + \Sigma\, m_i \,.\, m(e'_i); \qquad \Sigma = \Sigma\, m_i \,.\, m(e_i) + \Sigma\, m_{i+1}\, m(e'_i)$$

dans lesquelles les signes Σ représentent des sommes de deux séries l'une à

(*) Il n'y aurait d'ailleurs aucune difficulté à poser le problème de la mesure des ensembles de points pour tous les ensembles, bornés ou non.

termes positifs, l'autre à termes négatifs. Ces séries peuvent être convergentes ou divergentes; si celles qui figurent dans σ sont convergentes, c'est-à-dire si σ a un sens, Σ a un sens et inversement; et il en est de même quels que soient les m_i choisis.

En raisonnant comme au paragraphe 20 on verra que les deux sommes σ et Σ tendent vers la même limite, indépendante des m_i choisis, quand on augmente le nombre des m_i de façon que le maximum de $m_i - m_{i-1}$ tende vers zéro. — Cette limite est l'intégrale.

Avec cette extension du sens des mots *fonction sommable* et *intégrale*, tous les énoncés donnés précédemment restent exacts (*). Mais il faut se rappeler qu'une fonction sommable non bornée n'a pas nécessairement une intégrale (**).

25. Le calcul de l'intégrale d'une fonction donnée présente les mêmes difficultés que le calcul de la mesure d'un ensemble donné.

La plupart des fonctions discontinues que l'on a considérées jusqu'à présent en Analyse étaient définies à l'aide de séries, il y a donc intérêt à connaitre le théorème suivant.

Si une suite de fonctions sommables, ayant des intégrales $f_1, f_2, f_3 \ldots$ a une limite f et si $|f - f_n|$ reste, quel que soit n, inférieure à un nombre fixe M, f a une intégrale qui est la limite des intégrales des fonctions f_n (***).

En effet on a:

$$f = f_n + (f - f_n).$$

Les deux fonctions du second membre ayant des intégrales il en est de même de f et l'intégrale de f est la somme des intégrales de f_n et $f - f_n$. Cherchons une limite supérieure de cette seconde intégrale.

Choisissons arbitrairement un nombre positif Σ. Soit e_n l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles on n'a pas, pour toute valeur positive ou nulle

(*) Le premier des énoncés du § 22 demande cependant quelques explications. Si f et φ sont sommables $f + \varphi$ l'est et l'on a bien $\int (f + \varphi) = \int f + \int \varphi$ si $\int f$ et $\int \varphi$ ont un sens; mais $\int (f + \varphi)$ peut avoir un sens sans qu'il en soit de même de $\int f$ et de $\int \varphi$.

(**) Il resterait à examiner le cas où f devient infinie pour certaines valeurs de x. Si ces valeurs sont en nombre fini il suffit de définir l'intégrale en faisant abstraction des valeurs qui rendent f infinie, pour que les énoncés ordinaires ne soient pas changés.

(***) Le cas particulier le plus intéressant de ce théorème, celui où f et les f_i sont des fonctions continues, a déjà été obtenu, à l'aide de considérations toutes différentes par M.r Osgood, dans son Mémoire sur la convergence non uniforme (*American Journal*, 1894).

de p

$$|f - f_{n+p}| < \varepsilon,$$

e_n est mesurable.

Soit E l'ensemble mesurable dans lequel on prend les intégrales, on a:

$$\left|\int (f - f_n)\, d\,x\right| \leqq M \,.\, m\,(e_n) + \varepsilon \left[m\,(E) - m\,(e_n) \right].$$

Or chaque ensemble e_n contient tous les ensembles dont les indices sont plus grands et il n'existe aucun point commun à la fois à tous les e_n. Donc $m\,(e_n)$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$ et par suite il en de même de

$$\left|\int (f - f_n)\, d\,x\right|.$$

Lorsque f est bornée la proposition peut s'énoncer ainsi: Lorsqu'une suite $f_1 f_2 \ldots$ de fonctions sommables, limitées supérieurement en valeur absolue dans leur ensemble, a une limite f l'intégrale de f est la limite des intégrales des fonctions f_n.

Voici une autre forme de l'énoncé relatif au cas général:

Lorsque l'ensemble des restes d'une série convergente de fonctions ayant des intégrales est limité supérieurement en valeur absolue, la série est intégrable terme à terme.

Comme cas très particulier on a le théorème sur l'intégration des séries uniformément convergentes.

II. Integrales indefinies et fonctions primitives des fonctions d'une variable.

26. On appelle intégrale indéfinie d'une fonction $f(x)$, ayant une intégrale définie dans un intervalle (α, β), une fonction $F(x)$ définie dans (α, β) et telle que, quels que soient a et b compris entre α et β, on ait:

$$\int_a^b f(x)\, d\,x = F(b) - F(a).$$

De cette égalité on tire :

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx + F(a).$$

Donc toute fonction ayant une intégrale définie admet une infinité d'intégrales indéfinies qui ne diffèrent que par une constante $F(a)$.

L'intégrale indéfinie est une fonction continue (*), cela est évident si la fonction $f(x)$ est bornée. Pour le démontrer dans le cas général reprenons les notations du paragraphe 24; a étant arbitrairement choisi il faut démontrer que dès que h est inférieur en valeur absolue à une certaine quantité on a :

$$\left| F(a+h) - F(a) \right| = \left| \int_a^{a+h} f(x)\,dx \right| < \varepsilon.$$

Nous allons, pour simplifier, supposer h positif.

Il existe *au plus* une infinité dénombrable de nombres m_i tels que les ensembles e_i correspondants aient une mesure non nulle, on pourra donc supposer que les m_i n'ont pas été pris parmi ces valeurs exceptionnelles, c'est-à-dire que nous ferons $m(e_i) = 0$, ce qui simplifie les sommes σ et Σ.

Alors si l'on suppose $m_0 = 0$ (**), on peut écrire

$$\int_a^{a+h} f(x)\,dx = \lim \left\{ \sum_0^{\infty} m_{i+1}\, m\left[e'_i(h)\right] + \sum_{-1}^{-\infty} m_i\, m\left[e'_i(h)\right] \right\}$$

en désignant par $e'_i(h)$ la portion de e'_i comprise entre a et $a+h$. Considérons un système fixe de nombres m_i. Les deux séries du second membre ne varieront que si h varie et l'on peut supposer h assez petit pour que la valeur absolue d'un nombre fini quelconque de termes du second membre soit aussi petite que l'on veut. Donc on peut prendre h assez petit que les deux séries du second membre, qui sont l'une à termes positifs, l'autre à termes négatifs, soient aussi petites que l'on veut en valeur absolue.

(*) On peut aussi ajouter qu'elle a une variation bornée; cette variation étant au plus égale à $\int |f(x)|\,dx$. La démonstration est la même que celle qu'emploie M.r Jordan, *Cours d'Analyse* § 81. Ceci explique les résultats obtenus plus loin (§§ 30, 31, 32).

(**) Alors e_0 ne sera peut-être pas de mesure nulle, mais cela n'a pas d'importance pour la suite.

Mais pour passer à la limite il faut, entre les m_i choisis, introduire de nouveaux nombres; cette opération fait diminuer, en valeur absolue, les deux séries du second membre; donc il est bien démontré que $\int_a^{a+h} f(x)\,dx$ peut être rendue aussi petite que l'on veut. L'intégrale indéfinie est donc bien une fonction continue.

27. Si M et m sont les maximum et minimum de $f(x)$ dans $(a, a+h)$ on a:

$$m\,h < \int_a^{a+h} f(x)\,dx < M\,h$$

d'où

$$m < \frac{F(a+h) - F(a)}{h} < M$$

donc pour $x = a$, si $f(x)$ est continue en ce point, $F(x)$ a une dérivée égale à $f(a)$.

Si $f(x)$ est continue pour toute valeur de x, $F(x)$ est l'une quelconque des fonctions qui admettent pour dérivée $f(x)$, c'est-à-dire l'une des *fonctions primitives* de $f(x)$.

Ainsi dans le cas des fonctions continues il y a identité entre la recherche des fonctions primitives et la recherche des intégrales indéfinies d'une fonction donnée. Ce résultat bien connu est encore vrai lorsqu'il s'agit d'une fonction dérivée intégrable au sens de Riemann (*). Mais il existe des fonctions dérivées qui ne sont pas intégrables au sens de Riemann (**); une de ces fonctions étant donnée on ne peut pas calculer ses fonctions primitives à l'aide de l'intégration, au sens de Riemann.

Nous allons voir que toute fonction dérivée bornée admet une intégrale indéfinie qui est une de ses fonctions primitives; nous saurons donc calculer la fonction primitive, si elle existe, d'une fonction bornée donnée.

Relativement aux fonctions dérivées non bornées, nous démontrerons que si elles admettent des intégrales il y a identité entre leurs fonctions primitives et leurs intégrales indéfinies.

(*) Voir Darboux, *Mémoire sur les fonctions discontinues.*

(**) M.r Volterra a le premier donné effectivement un exemple de ces fonctions (*Giornale de Battaglini*, t. XIX, 1881). Cet exemple est reproduit plus loin.

28. La dérivée d'une fonction $f(x)$ est la limite quand h tend vers zéro de l'expression :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\varphi(x)$$

laquelle, h étant fixe, représente une fonction continue; donc la dérivée est limite de fonctions continues, elle est sommable.

Supposons que la dérivée f' soit toujours inférieure en valeur absolue à M. En vertu du théorème des accroissements finis $\varphi(x)=f'(x+\theta h)$, donc les fonctions $f(x)$ sont bornées dans leur ensemble et par suite l'on a (§ 25):

$$\int_a^b f'x\,dx=\lim\int_a^b \varphi(x)\,dx=\left[\lim_{h=0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\,dx\right]_a^b$$

donc

$$\int_a^b f'x\,dx=f(b)-f(a).$$

Toute fonction dérivée bornée admet comme intégrales indéfinies ses fonctions primitives; ce résultat est encore vrai s'il s'agit de dérivée à droite, ou à gauche bornée; ou d'une limite vers laquelle tend $\varphi(x)$ pour certaines valeurs de h tendant vers zéro.

29. Pour appliquer ce qui précède, nous allons rechercher s'il existe des fonctions primitives pour la fonction définie de la manière suivante :

Soit un ensemble E fermé non dense dans toute portion de (0, 1) et de mesure non nulle. Soient (a, b) un intervalle contigu à E (*) et c le milieu de cet intervalle. La fonction

$$\varphi(x-a)=2(x-a)\sin\frac{1}{x-a}-\cos\frac{1}{x-a}$$

s'annule une infinité de fois entre a et c; soit $a+d$ le point le plus voisin de c, entre a et c, pour lequel elle est nulle.

La fonction $f(x)$ dont nous allons nous occuper est nulle pour tous les points de E; dans chaque intervalle (a, b) contigu à E, elle est égale à $\varphi(x-a)$ entre a et $a+d$, nulle entre $a+d$ et $b-d$, égale à $-\varphi(b-x)$ entre $b-d$ et b.

(*) C'est-à-dire un intervalle ne contenant pas de points de E et dont les extrémités sont points de E. — Cette expression est de M.r Baire.

Cette fonction est continue dans chaque intervalle contigu à E, discontinue pour tous les points de E qui sont des points de discontinuité de seconde espèce.

De plus $f(x)$ est toujours comprise entre -3 et $+3$. Pour que $f(x)$ admette une fonction primitive, il faut d'abord qu'elle admette une intégrale définie dans l'intervalle (0, 1). Cette intégrale, si elle existe, est égale à l'intégrale prise dans E plus l'intégrale prise dans $C(E)$, à supposer qu'elles existent. Or l'intégrale dans E existe et est nulle; l'intégrale dans $C(E)$ existe aussi, car elle est la somme des intégrales prises dans les intervalles contigus à E, lesquelles sont nulles.

D'après cela la fonction $F(x)$ nulle pour les points de E, et définie dans tout intervalle (a, b) contigu à E par les égalités

$$F(x) = (x-a)^2 \sin \frac{1}{x-a} \qquad \text{entre } a \text{ et } a+d$$

$$F(x) = d^2 \sin \frac{1}{d} \qquad \text{entre } a+d \text{ et } b-d$$

$$F(x) = (b-x)^2 \sin \frac{1}{b-x} \qquad \text{entre } b-d \text{ et } b$$

est égale à $\int f(x)\, dx$.

Donc si $f(x)$ a des fonctions primitives, $F(x)$ est l'une d'elles.

Pour tous les points où $f(x)$ est continue, c'est-à-dire pour tous les points de $C(E)$, on a évidemment

$$F'(x) = f(x).$$

Soit a un point de E; si a est extrémité d'un intervalle contigu à E, situé à droite de a, $F(x)$ a évidemment une dérivée à droite nulle. Supposons qu'à droite de a se trouve une infinité de points de E, ayant a pour point limite. Soient α_i un de ces points, pour x supérieur à α_i le rapport

$$r(x) = \frac{F(x) - F(a)}{x-a}$$

est en valeur absolue inférieur à

$$\frac{(x-\alpha_i)^2}{x-a} < x - a,$$

donc tend vers zéro quand x tend vers a.

En tous les points de E, $F(x)$ a donc une dérivée à droite nulle, on verrait de même qu'elle a une dérivée à gauche nulle, et par suite pour toute valeur de x comprise entre 0 et 1 on a :

$$F'(x) = f(x).$$

La fonction $f(x)$ est donc une fonction dérivée; elle n'est pas intégrable (au sens de RIEMANN) puisque l'ensemble de ses points de discontinuité a une mesure non nulle.

Cet exemple de fonction dérivée non intégrable au sens de RIEMANN est dû à M.r VOLTERRA, *Giornale de Battaglini*, tome XIX (*).

30. Les fonctions primitives que nous venons de trouver sont à variation bornée (**). Nous allons démontrer que : *la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale de la dérivée (bornée ou non) d'une fonction dérivable existe est que cette fonction soit à variation bornée. S'il en est ainsi, la fonction est l'une des intégrales indéfinies de sa dérivée.*

Puisque $f'(x)$ est sommable, pour rechercher son intégrale opérons comme au paragraphe 24. Nous supposerons tous les e_i de mesure nulle et de plus $m_0 = 0$, ce qui est possible si, au lieu de raisonner sur la fonction donnée $f(x)$, on raisonne sur $f(x) + Kx$, K ayant été convenablement choisi.

A chaque point x_0 de e'_i, on peut faire correspondre un intervalle (α, β) tel que si l'on a :

$$\alpha < a \leqq x_0 \leqq b < \beta$$

on ait aussi

$$m_i < r(a, b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < m_{i+1}.$$

Nous définirons (α, β) comme étant le plus grand intervalle possible de longueur au plus égale à un nombre donné σ et ayant x_0 pour milieu.

Si $m_i - m_{i-1}$ est toujours inférieur à η, $(b - a)\,r(a, b)$ est à $\eta(b - a)$ près égal à $f'(x_0)(b - a)$.

(*) Des séries uniformément convergentes, dont les termes sont des fonctions analogues à celle que nous venons de considérer, permettent à M.r VOLTERRA de donner des exemples de fonctions dérivées qui ne sont intégrables dans aucun intervalle.

L'intégration terme à terme de ces séries nous donnera les fonctions primitives.

(**) Nous nous servirons ici de quelques unes des propriétés de ces fonctions (Voir JORDAN, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* 1881 et *Cours d'Analyse* 2ème Edition, tome I). La plupart de ces propriétés sont reprises dans le chapitre suivant, de sorte que les paragraphes 30 à 35 pourraient être mis dans ce chapitre. L'ordre adopté dans le texte permet de réunir tout ce qui a trait à la recherche des fonctions primitives.

Soit $E_i(\sigma)$ l'ensemble somme des intervalles qui correspondent aux points de e'_i. $E_i(\sigma)$ peut être considéré comme une somme d'intervalles n'empiétant pas les uns sur les autres; si (a, b) est l'un de ces intervalles et si l'on a:

$$a < \alpha < \beta < b,$$

on a aussi

$$m_i < r(\alpha, \beta) < m_{i+1}$$

pourvu que, entre α et β, se trouve au moins un point de e'_i.

$E_i(\sigma)$ contient e'_i. Faisons tendre σ vers zéro et soit x_0 un point appartenant à une infinité d'ensembles $E_i(\sigma)$. $f'(x_0)$ est la limite des valeurs de $r(\alpha, \beta)$ relatives aux intervalles des $E_i(\sigma)$ qui contiennent x_0, donc x_0 est point de e_i, de e'_i ou de e_{i+1}. Par suite l'ensemble E_i, formé des points communs à une infinité de $E_i(\sigma)$ relatifs à des valeurs de σ tendant vers zéro, contient e'_i et des points de $e_i + e_{i+1}$, il a donc même mesure que e'_i. De plus comme chaque $E_i(\sigma)$ contient les ensembles relatifs aux valeurs plus petites de σ, $m(E_i)$ est la limite de $m[E_i(\sigma)]$. On peut donc choisir les nombres

$$\ldots \sigma_{-2}, \sigma_{-1}, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2 \ldots$$

de manière que la somme D soit aussi petite que l'on veut,

$$D = \sum_{-\infty}^{+\infty} |m_i| \cdot \left(m[E_i(\sigma_i)] - m(E_i)\right).$$

Ceci posé, remarquons que $\int f' \, dx$ et $\int |f'| \, dx$ existent en même temps de sorte que $\int f' \, dx$ existe si la série

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |m_i| \cdot m(e'_i) = \sum_{-\infty}^{+\infty} |m_i| \cdot m(E_i)$$

est convergente, c'est-à-dire s'il en est de même pour

$$V = \sum_{-\infty}^{+\infty} |m_i| \cdot m[E_i(\sigma_i)].$$

On peut toujours, parmi les intervalles formant les $E_i(\sigma_i)$, en choisir un nombre fini de manière que la contribution de ces intervalles A dans V soit aussi grande que l'on veut si V est divergente, et aussi près que l'on veut de la valeur de V si cette série est convergente. Supprimons assez de ces intervalles A, sans changer l'ensemble somme de ces intervalles, pour qu'aucun

des intervalles conservés ne soit à l'intérieur d'autres intervalles conservés. La contribution dans V des intervalles supprimés est moindre que D.

Considérons deux intervalles empiétant l'un sur l'autre (a_i, b_i), (a_j, b_j) relatifs à e'_i et e'_j. Supposons que l'on ait

$$a_i < a_j < b_i < b_j.$$

Entre a_j et b_i il ne peut y avoir à la fois des points de e'_i et de e'_j sans quoi $r(a_j + \varepsilon, b_i - \varepsilon)$ serait à la fois compris entre m_i et m_{i+1} et entre m_j et m_{j+1}. On peut donc trouver entre a_j et b_i un point c tel qu'entre a_i et c se trouve un point de e'_i et entre c et b_j un point de e'_j. Alors on a :

$$|f(c) - f(a_i)| + |f(b_j) - f(c)| = (c - a_i) |r(a_i, c)| + (b_j - c) | r(c, b_j)| .$$

Donc le premier membre, c'est-à-dire la variation de $f(x)$ entre a_i et b_j quand on considère la division

$$a_i \qquad c \qquad b_j,$$

est égal à la contribution dans V des deux intervalles (a_i, b_i), (a_j, b_j) à moins de $(b_i - a_j) |m_j - m_i| + \eta (b_j - a_i)$ près. La quantité $(b_i - a_j) |m_j - m_i|$ est inférieure à la contribution dans D de l'intervalle (a_j, b_i).

En continuant ainsi, on est conduit à considérer une suite de valeurs croissantes $x_0 x_1 x_2 \ldots$ en nombre fini. La somme $\Sigma |f(x_i) - f(x_{i+1})|$ diffère de la contribution des intervalles A dans V de moins de $D + \eta\, m(A)$. Or cette somme est inférieure à la variation totale de $f(x)$. Donc la limite de V c'est-à-dire $\int |f'| dx$ est inférieure ou au plus égale à la variation totale de $f(x)$. C'est-à-dire que si $f(x)$ est à variation bornée $\int |f'| dx$ existe et est inférieure à la variation de $f(x)$.

31. Supposons que l'intégrale $\int |f'| dx$ existe.

Enfermons les points de e_i dans une infinité dénombrable d'intervalles A_i, on peut choisir $m(A_i)$ aussi petite que l'on veut. A chaque point x_0 de e_i faisons correspondre le plus grand intervalle (α, β) de longueur inférieure à σ'_i, ayant x_0 pour milieu, tout entier à l'intérieur de A_i et tel que

$$\alpha < a \leq x_0 \leq b < \beta$$

entraine

$$m_i - \varepsilon_i < r(a, b) < m_i + \varepsilon_i.$$

Soit $e_i(\sigma'_i)$ la somme de ces intervalles. A condition de choisir convenablement les σ'_i et ε_i, la somme D' sera aussi petite qu'on le voudra,

$$D' = \sum_{-\infty}^{+\infty} |m_i| \, . \, m\,[e_i(\sigma'_i)].$$

Chaque $E_i(\sigma_i)$ ou $e_i(\sigma'_i)$ est somme d'une infinité dénombrable d'intervalles n'empiétant pas les uns sur les autres. Si $f(x)$ est définie dans (a, b), chaque point *intérieur* à (a, b) est *intérieur* à l'un au moins de ces intervalles et de plus a et b sont des extrémités de tels intervalles, donc, d'après un théorème sur les ensembles, on peut choisir parmi les intervalles qui forment les $E_i(\sigma_i)$ et les $e_i(\sigma'_i)$ un nombre fini d'intervalles B tel que tout point intérieur à (a, b) soit intérieur à l'un des B.

Nous supposerons ce choix fait de façon qu'aucun intervalle conservé ne soit intérieur à d'autres intervalles conservés. La contribution dans V des intervalles des $E_i(\sigma_i)$ non employés est au plus égale à $D + D_1$, D_1 étant l'intégrale de $|f'|$ dans l'ensemble des $e_i(\sigma'_i)$.

En raisonnant sur les B comme sur les A, on est conduit à considérer des nombres

$$x_0 = a < x_1 < x_2 \ldots < x_n = b.$$

La somme $\Sigma\,|f(x_i) - f(x_{i-1})|$ est égale à la contribution dans V des intervalles conservés provenant des $E_i(\sigma_i)$, à moins de $D + D' + \eta\,(b - a)$ près.

Or deux nombres x_i consécutifs proviennent d'un même intervalle appartenant à l'un des $E_i(\sigma_i)$ ou des $e_i(\sigma'_i)$, lequel peut être décomposé en intervalles de longueurs au plus égales à $2\,\sigma_i$ ou $2\,\sigma'_i$, la somme des variations correspondantes à une telle division diffère toujours de V de moins de $2\,D + D_1 + D' + \eta\,(b - a)$. Or par l'introduction de ces nouveaux points de division, en prenant le maximum σ des σ_i et σ'_i assez petit, on rend la somme $\Sigma\,|f(x_i) - f(x_{i-1})|$ aussi voisine que l'on veut de la variation totale de $f(x)$ dans (a, b).

De là résulte que si $\int f'(x)\,dx$ existe, la fonction $f(x)$ est à variation bornée, cette variation étant égale à la valeur de l'intégrale $\int |f'|\,dx$.

32. Nous avons ainsi trouvé la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale de f' existe, et nous connaissons sa signification.

Mais le raisonnement précédent fournit d'autres résultats. Reprenons en effet ce raisonnement et portons notre attention sur les ensembles e_i, E_i, $E_i(\sigma)$, E_i, etc. à indices positifs.

Nous voyons que la variation positive totale de $f(x)$ entre a et x est égale à l'intégrale de $f'(x)$ étendue à l'ensemble des points pour lesquels f' est positive, c'est-à-dire à l'intégrale

$$p(x) = \frac{1}{2}\int_a^x (f' + |f'|)\, d\, x.$$

De même pour la variation négative on a:

$$-n(x) = \frac{1}{2}\int_a^x (f' - |f'|)\, d\, x.$$

Et comme l'on a:

$$f(x) - f(a) = p(x) - n(x)$$

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(x)\, d\, x.$$

Ainsi une fonction $f(x)$ étant donnée nous savons reconnaître si elle est la dérivée d'une fonction à variation bornée et, s'il en est ainsi, nous savons trouver ses fonctions primitives.

Si $f(x)$ est bornée, ses fonctions primitives s'il en existe sont à variation bornée, nous pouvons les trouver.

Mais l'intégration, telle que nous l'avons définie, ne nous permet pas de savoir si une fonction donnée a des fonctions primitives à variation non bornée (*).

33. La fonction $f(x)$ donnée par $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est continue et à variation non bornée.

(*) Ce dernier résultat était évident puisque (Note du § 26) toute intégrale indéfinie est à variation bornée.

La démonstration qui précède montre que, pour obtenir une fonction $f(x)$ à variation non bornée connaissant sa dérivée, par une méthode analogue à celle que nous avons employée quand f est à variation bornée, il faudrait mettre un certain ordre dans les termes des séries telles que $\Sigma\, m_i\, m\,[E_i\,(\sigma_i)]$, $\Sigma\, m_i\, m\,(e_i')$.

La généralisation de la notion d'intégrale indéfinie donnée dans le paragraphe suivant, permet dans quelques cas d'obtenir ce résultat; aussi elle donnera des fonctions primitives à variation non bornée.

En effet

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{k\pi}}\right) = 0$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{k\pi + \frac{\pi}{2}}}\right) = (-1)^k \frac{1}{k\pi + \frac{\pi}{2}}$$

donc la somme des variations est $\Sigma \frac{1}{k\pi + \frac{\pi}{2}}$, série divergente.

Cette fonction admet une dérivée $f'(x)$,

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}, \qquad \text{pour } x \neq 0$$

et

$$f'(0) = 0$$

$f'(x)$ nous fournit un exemple de fonction non bornée, sommable, n'ayant pas d'intégrale. $f'(x)$ étant donnée, les méthodes précédentes ne permettent pas de trouver $f(x)$.

Il est intéressant de remarquer que la définition classique de l'intégrale d'une fonction devenant infinie dans le voisinage d'un point, permet de trouver $f(x)$ connaissant $f'(x)$. C'est que, dans le cas où la fonction à intégrer n'est pas bornée, la définition que nous avons adoptée n'est pas une généralisation de la définition classique, elle est autre que cette définition, mais concorde avec elle lorsque toutes deux s'appliquent. Il serait d'ailleurs très facile de généraliser la notion d'intégrale définie de façon que la définition classique et celle que nous avons adoptée deviennent des cas particuliers d'une définition plus générale. Pour simplifier les énoncés qui suivront, nous conserverons cependant au mot *intégrale définie* le sens précédemment adopté, mais nous étendrons le sens du mot *intégrale indéfinie.*

Nous avons vu que toute intégrale indéfinie était continue. Si maintenant nous considérons cette propriété comme l'une des parties de la définition des intégrales indéfinies, nous sommes conduits à dire que :

Une fonction $f(x)$ définie dans (α, β) a dans cet intervalle une intégrale indéfinie $F(x)$, s'il existe une fonction continue $F(x)$, et une seule à une constante additive près, telle que l'on ait :

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\, dx$$

pour tous les systèmes de nombres a et b choisis, entre α et β, de manière que le second membre ait un sens (*).

34. L'intégrale indéfinie d'une fonction dérivée est toujours une de ses fonctions primitives puisqu'une fonction primitive est continue et, d'après ce que nous avons dit, vérifie bien l'égalité

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

toutes les fois que le second membre a un sens.

Nous saurons ainsi trouver la fonction primitive de la fonction $f'(x)$ du paragraphe 30.

Mais il est facile de former des fonctions dérivées n'ayant pas d'intégrales indéfinies.

Soit $\varphi(x)$ une fonction dérivable définie entre 0 et 1 s'annulant pour 0 et 1 ainsi que sa dérivée, ayant une variation bornée dans tout intervalle *intérieur* à (0, 1), ayant une variation non bornée dans tout intervalle dont une des extrémités est 0 ou 1.

On sait trouver $\varphi(x)$ quand on connaît $\varphi'(x)$, car $\varphi(x)$ est celle des intégrales indéfinies de $\varphi'(x)$ qui s'annule pour $x = 0$.

Considérons un ensemble E fermé non dense dans toute partie de (0, 1) et de mesure non nulle; par exemple, celui que l'on obtient en retranchant de (0, 1) une suite indéfinie d'intervalles dont les milieux sont les points d'abscisses rationnelles et dont la somme des longueurs est inférieure à 1.

Définissons une fonction $f(x)$ continue, par la condition d'être égale à $(b-a)^2\varphi\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$ dans tout intervalle (a, b) contigu à l'ensemble E. $f(x)$ est alors nulle en tous les points de E. Cette fonction est dérivable, sa dérivée est nulle pour les points de E, égale à $(b-a)\varphi'\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$ pour les points d'un intervalle (a, b) contigu à E.

Cette dérivée $f'(x)$ n'admet pas d'intégrale indéfinie. En effet si elle en admettait, ses intégrales indéfinies seraient $f(x) + c^{te}$. Mais soit $\psi(x)$ la fonction qui représente la mesure de l'ensemble de ceux des points de E qui

(*) Comparer cette définition avec celle que donne M.r Jordan de l'intégrale définie d'une fonction non bornée. *Cours d'Analyse,* 2.e Edition, Tome II, p. 46 à 91.

sont dans l'intervalle (0, x); $\psi(x)$ est une fonction continue, constante dans tout intervalle contigu à E, donc $f(x) + \psi(x)$ satisfait à l'égalité

$$\left[f(x) + \psi(x)\right]_\alpha^\beta = \int_\alpha^\beta f'(x)\,dx$$

pour tous les systèmes α, β pour lesquels le second membre a un sens.

Les définitions que nous avons données ne suffisent donc pas pour qu'il soit possible de parler d'intégrales indéfinies de $f'(x)$.

Le problème de la recherche des fonctions primitives n'est pas complètement résolu (*).

35. Soit $f(x)$ une fonction continue; on peut donner à h une suite de valeurs tendant vers zéro telles que

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

ait une limite. L'ensemble des nombres ainsi définis, correspondant aux valeurs positives de h, admet une limite supérieure Λ_d et une limite inférieure λ_d qui sont les extrêmes oscillatoires à droite de la fonction $f(x)$, pour le point x_0. De même on définit Λ_g, λ_g. Ces quatre nombres sont les nombres dérivés; dans certains problèmes ils rendent les mêmes services que la dérivée (**).

Le problème suivant: *Trouver une fonction connaissant l'un de ses nombres dérivés* (***), est donc une généralisation du problème que nous venons de traiter.

Quelques cas particuliers de ce problème se résolvent à l'aide de l'intégration au sens de Riemann (Dini, loc. cit.). L'intégration, telle que nous

---

(*) On peut dire que nous savons résoudre ce problème lorsque l'intervalle de variation de x peut être considéré comme somme d'un ensemble non dense E et de l'ensemble des intervalles (α, β) contigus à E, l'ensemble E étant réductible et la fonction proposée ayant une intégrale indéfinie $F(x)$ dans chaque intervalle (α, β).

Même si E n'est pas réductible le problème peut être résolu, à condition que la fonction soit intégrable dans E et que la série des quantités $[F(\beta) - F(\alpha)]$ soit absolument convergente. Il en est ainsi dans l'exemple précédent, mais ce n'est pas le cas général.

(**) Voir Dini: *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali.*

(***) Ce problème a un sens; c'est-à-dire que toutes les fonctions qui ont un même nombre dérivé donné ne diffèrent que par une constante (Volterra. *Sui principii del Calcolo Integrale.* Giornale de Battaglini, XIX).

l'avons définie, permettrait de le résoudre dans des cas plus étendus. Nous nous bornerons aux indications qui suivent.

Tout d'abord, si l'un des quatre nombres dérivés est toujours fini, Λ_d par exemple, c'est une fonction sommable. En effet cherchons l'ensemble E des valeurs de x pour lesquelles Λ_d est supérieur à un nombre donné M. Donnons à h toutes les valeurs positives rationnelles inférieures à ε_1; à chacune d'elles correspond une fonction $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \varphi(x, h)$. A $\varphi(x, h)$ correspond un ensemble mesurable $E(h)$ formé de tous les points pour lesquels on a:

$$\varphi(x, h) > M.$$

Soit $E(\varepsilon_1)$ l'ensemble somme de tous les $E(h)$; il est mesurable.

A ε_2, ε_3 ... correspondent $E(\varepsilon_2)$, $E(\varepsilon_3)$ ...

Si les ε tendent vers zéro, l'ensemble commun à tous les $E(\varepsilon_i)$ qui est mesurable contient l'ensemble cherché, plus des points pour lesquels on a: $\Lambda_d = M$. Cela suffit pour qu'on en conclue que la fonction Λ_d est sommable.

Supposons maintenant que l'un des quatre nombres dérivés soit borné, auquel cas tous les autres le sont. (*). Λ_d aura alors une intégrale.

Considérons une suite de nombres positifs décroissant jusqu'à zéro h_1, h_2... et les fonctions

$$\varphi(x, h_i) = \frac{f(x+h_i) - f(x)}{h_i}.$$

A chaque valeur de x correspond une valeur n telle que, pour $i \geqq n$, on a:

$$\varphi(x, h_i) < \Lambda_d(x) + \varepsilon.$$

Soit E_k l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles on a $n \leqq k$. Le complémentaire $C(E_k)$ pris par rapport à l'intervalle considéré a une mesure qui tend vers zéro avec $\frac{1}{k}$, et pour les points de cet ensemble on a:

$$\left| \varphi(x, h_k) - \Lambda_d(x) \right| \leqq M$$

(*) Car si Λ_d est toujours compris entre A et B, le rapport $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est toujours compris entre A et B. (Voir Dini. *Fondamenti*, etc.).

si M est la limite supérieure de la valeur absolue de Λ_d. Donc (*)

$$\int_a^b \varphi(x, h_k)\, dx < \int_a^b \Lambda_d(x)\, dx + \varepsilon\, m(E_k) + M\, m\Big[C(E_k)\Big].$$

Evaluons le premier membre

$$\int_a^b \varphi(x, h_k)\, dx = \int_a^b \frac{f(x+h_k) - f(x)}{h_k} = f(b + \theta\, h_k) - f(a + \theta'\, h_k).$$

Lorsque k augmente indéfiniment cette quantité tend vers $f(b) - f(a)$, on a donc

$$f(b) - f(a) < \int_a^b \Lambda_d(x)\, dx.$$

De même on trouverait

$$\int_a^b \lambda_d(x)\, dx < f(b) - f(a).$$

Donc *si les deux nombres dérivés à droite (ou à gauche) d'une fonction $f(x)$ sont bornés et ont même intégrale, leurs intégrales indéfinies sont égales à $f(x)$ à une constante additive près.*

III. Integrales définies des fonctions de plusieurs variables.

36. Il n'y a aucune difficulté à étendre les résultats obtenus aux fonctions de plusieurs variables.

Une fonction f sera dite sommable si l'ensemble des points pour lesquels on a:

$$a \leq f < b$$

est mesurable, quels que soient les nombres a et b.

(*) Pour que $\int_a^b \varphi(x, h_k)\, dx$ ait un sens il faut que $f(x)$ soit définie dans $a, b + h_k$. Il suffit de définir $f(x)$ comme constante et égale à $f(b)$ pour x plus grand que b.

Les fonctions continues par rapport à l'ensemble des variables sont sommables. La somme, le produit de deux fonctions sommables, la limite d'une suite de fonctions sommables sont des fonctions sommables. Donc les fonctions discontinues que M.r Baire appelle fonctions de première classe, de seconde classe, etc. sont sommables.

Les fonctions de n variables continues par rapport à chacune d'elles sont de $n-1^{\text{ème}}$ classe au plus (*), donc elles sont sommables.

Soit f une fonction sommable. Considérons des nombres

$$\ldots < m_{-2} < m_{-1} < m_0 < m_1 < m_2 < \ldots$$

tels que $m_i - m_{i-1}$ ait un maximum η.

$f = m_i$ pour les points d'un ensemble mesurable e_i; $m_i < f < m_{i+1}$ pour les points d'un ensemble mesurable e'_i. Les deux sommes

$$\sigma = \Sigma\, m_i\, m(e_i) + \Sigma\, m_i\, m(e'_i), \qquad \Sigma = \Sigma\, m_i\, m(e_i) + \Sigma\, m_{i+1}\, m(e'_i)$$

ont en même temps un sens ou n'en ont pas.

Si elles ont un sens, il en est de même quels que soient les m_i choisis et ces deux sommes tendent vers une même limite quand η tend zéro.

Cette limite est l'intégrale de f. σ et Σ ont un sens lorsque f est bornée de sorte que *toute fonction sommable bornée a une intégrale.*

Les définitions qui précèdent s'appliquent, que la fonction soit définie dans un domaine ou pour les points d'un ensemble, lequel devra nécessairement être mesurable pour que la fonction soit sommable.

Soit une fonction f bornée définie dans un ensemble E mesurable. Si f n'est pas sommable il existe une infinité de fonctions sommables bornées φ telles que l'on ait toujours

$$f(x) > \varphi(x).$$

Soit $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)\ldots$ une série de ces fonctions dont les intégrales tendent vers la limite supérieure des intégrales des fonctions φ. Soit $\psi(x)$ une fonction égale pour chaque valeur de x_0 à la limite supérieure des nombres $\varphi_1(x_0)$, $\varphi_2(x_0)\ldots$ On démontrera facilement que $\psi(x)$ est sommable. Son intégrale n'est pas inférieure aux intégrales des fonctions $\varphi_i(x)$ et comme $\psi(x)$

(*) Voir Lebesgue. *Sur l'approximation des fonctions.* (Bulletin des Sciences Mathématiques, 1898.)

est une fonction $\varphi(x)$ l'intégrale de $\psi(x)$ est exactement égale à la limite supérieure des intégrales des fonctions $\varphi(x)$.

Donc, étant donnée une fonction bornée f, il existe une fonction sommable ψ non supérieure à f et dont l'intégrale est la limite supérieure des intégrales des fonctions sommables non supérieures à f. *C'est l'intégrale inférieure de f.*

On définirait de même l'intégrale supérieure (*).

37. Nous allons rechercher si l'on peut ramener le calcul d'une intégrale multiple à des calculs d'intégrales simples. En nous bornant au cas de deux variables nous allons essayer de généraliser la formule classique

$$\int\int f\,dx\,dy = \int\left(\int f\,dy\right)dx.$$

Le cas le plus simple que nous ayons à examiner correspond à $f = 1$. Nous avons alors à évaluer la mesure superficielle d'un ensemble en fonction des mesures linéaires de ses sections. Les considérations développées aux paragraphes 18 et 19 résolvent un cas particulier de ce problème.

Soit E un ensemble plan mesurable. Nous désignerons par $E(x_0)$ l'ensemble des points de E dont l'abcisse est x_0, c'est-à-dire la section de E par $x = x_0$. $E(x_0)$ n'est pas nécessairement mesurable, s'il existe des ensembles de points sur une droite non mesurables linéairement, puisque tout ensemble borné de points sur une droite est mesurable superficiellement. Mais $E(x_0)$ sera mesurable (B) linéairement si E est mesurable (B) superficiellement. Or on sait que E contient un ensemble mesurable (B) E_1 de mesure $m(E)$, la mesure de $E_1(x_0)$ sera donc au plus égale à la mesure intérieure de $E(x_0)$; c'est-à-dire au plus égale à l'intégrale inférieure, prise sur $x = x_0$, de la fonction φ égale à 1 pour les points de E, nulle pour les autres points. Donc

$$m_l[E_1(x_0)] \leqq \int_{\text{inf.}} \varphi(x_0, y)\,dy.$$

En se reportant au paragraphe 7 où a été démontrée l'existence de E_1, on voit que E_1 est défini comme formé des points communs à tous les ensembles de la suite $A_1, A_2, \ldots$; l'ensemble A_i étant somme d'une infinité dénombrable de rectangles n'empiétant pas les uns sur les autres et dont les côtés sont parallèles à $0x$ et $0y$. A_i contient $A_{i+1}, A_{i+2}, \ldots$

(*) Toutes ces définitions s'interprètent géométriquement comme pour le cas d'une variable. S'il y a n variables, il faut considérer un espace à $n + 1$ dimensions.

Or $m_l[A_i(x)]$ est la somme des mesures des sections par la droite d'abscisse x des rectangles C_{ij} qui composent A_i. On a donc

$$m_l[A_i(x)] = \sum_j m_l[C_{ij}(x)].$$

Dans cette série les restes sont limités supérieurement en valeur absolue, car E_1 étant borné tous les A_i sont situés dans un même domaine borné et par suite l'ensemble (par rapport à i et à x) des nombres $m_l[A_i(x)]$ est borné. Cette série est donc intégrable terme à terme, § 25.

L'intégrale de $m_l[C_{ij}(x)]$ est l'aire de C_{ij}, donc

$$m_s(A_i) = \int m_l[A_i(x)]\,d\,x.$$

Or les limites pour i infini des nombres $m_l[A_i(x)]$, $m_s(A_i)$ sont $m_l[E_1(x)]$ et $m_s(E_1)$ et comme l'ensemble de ces nombres est borné, on a :

$$\int m_l[E_1(x)]\,d\,x = \lim_{i=\infty} \int m_l[A_i(x)]\,d\,x = \lim_{i=\infty} m_s(A_i) = m_s(E_1) \text{ (*)}.$$

On peut donc en conclure que :

$$m_s(E) \leqq \int_{\text{inf.}} m_{l,\text{int.}}[E(x)]\,d\,x$$

et aussi que

$$m_s(E) \leqq \int_{\text{inf.}} \left(\int_{\text{inf.}} \varphi(x, y)\,d\,y\right) d\,x.$$

De la même façon on démontrera que :

$$m_s(E) \geqq \int_{\text{sup.}} \left(\int_{\text{sup.}} \varphi(x, y)\,d\,y\right) d\,x.$$

De là on conclut que l'on a :

$$m_s(E) = \int_{\text{inf.}} \left(\int_{\text{inf.}} \varphi(x, y)\,d\,y\right) d\,x = \int_{\text{sup.}} \left(\int_{\text{sup.}} \varphi(x, y)\,d\,y\right) d\,x \text{ (**)}.$$

(*) Ce raisonnement peut être interprété de la façon suivante : $m_s[E_1(x)]$ est une fonction de seconde classe au plus.

(**) Jusqu'ici les intégrales sont étendues à certains segments des axes $0x$ et $0y$.

Pour la fonction $f = 1$ définie seulement dans l'ensemble sommable E, dont les sections ne sont peut-être pas toutes mesurables

$$\int\int^{E} f\,dx\,dy = \int_{\text{inf.int.}}^{e} \left(\int_{\text{inf.int.}}^{E(x)} f\,dy\right) dx = \int_{\text{sup.ext.}}^{e} \left(\int_{\text{sup.ext.}}^{E(x)} f\,dy\right) dx$$

l'intégrale par rapport à x étant étendue à l'ensemble e projection de E sur $0x$, la seconde à l'ensemble $E(x)$. Mais ces deux ensembles ne sont peut être pas mesurables linéairement. Le signe $\int_{\text{inf.int.}}^{A}$ indique la limite supérieure des intégrales inférieures de f étendues aux ensembles mesurables contenus dans A.

L'égalité précédente peut encore s'écrire

$$m_s(E) = \int_{\text{inf.int.}}^{e} m_{l,\text{int.}}[E(x)]\,dx = \int_{\text{sup.ext.}}^{e} m_{l,\text{ext.}}[E(x)]\,dx.$$

38. La formule trouvée pour exprimer $\int\int_{E} f\,dx\,dy$ est générale, elle s'applique à toutes les fonctions sommables bornées.

Désignons par $\varphi(x, y)$ une fonction égale à f pour les points de E, nulle pour les autres points. Si E est tout entier intérieur au rectangle $OACB$ dont les côtés OA et OB sont portés par ox et oy, la formule à démontrer est équivalente à la suivante

$$\int\int_{OACB} \varphi(x, y)\,dx\,dy = \int_{O\,\text{inf.}}^{A} \left(\int_{O,\text{inf.}}^{B} \varphi(x, y)\,dy\right) dx = \int_{O,\text{sup.}}^{A} \left(\int_{O,\text{sup.}}^{B} \varphi(x, y)\,dy\right) dx.$$

C'est cette formule que nous allons démontrer.

Soient $m_0, m_1 \ldots m_n$ les divisions de l'intervalle de variation de $\varphi(x, y)$. Désignons par $\varphi_p(x, y)$ la fonction égale à φ pour les points de e_p (notations du § 19), nulle pour les autres points, et par $\varphi'_p(x, y)$ la fonction égale à φ pour les points de e'_p, nulle pour les autres points.

On a:

$$\int\int \varphi(x, y)\,dx\,dy = \sum_p \int\int \varphi_p(x, y)\,dx\,dy + \sum_p \int\int \varphi'_p(x, y)\,dx\,dy$$

$\int\int \varphi_p(x, y)\, dx\, dy$ est égale à $m_p \cdot m(e_p)$ et, d'après le paragraphe précédent, on a :

$$\int\int \varphi_p(x, y)\, dx\, dy = \int_{\text{inf.}} \left(\int_{\text{inf.}} \varphi_p(x, y)\, dy\right) dx,$$

$\int\int \varphi'_p(x, y)\, dx\, dy$ est comprise entre $m_p\, m(e'_p)$ et $m_{p+1}\, m(e'_p)$; d'ailleurs si l'on remplace φ'_p par une fonction ψ, égale à m_p ou m_{p+1} en tous les points où φ_p est différente de zéro, nulle quand φ'_p est nulle, on modifie l'intégrale de moins de $(m_{p+1} - m_p)\, m(e'_p)$. De plus les deux expressions

$$\int_{\text{inf.}} \left(\int_{\text{inf.}} \psi\, dy\right) dx \qquad \int_{\text{inf.}} \left(\int_{\text{inf.}} \varphi'\, dy\right) dx$$

diffèrent aussi de moins de $(m_{p+1} - m_p)\, m(e'_p)$. Donc, à moins de $2(m_{p+1} - m_p)\, m(e'_p)$ près, on a :

$$\int\int \varphi'_p(x, y)\, dx\, dy = \int_{\text{inf.}} \left(\int_{\text{inf.}} \varphi'_p(x, y)\, dy\right) dx.$$

Soit η le maximum de $m_{p+1} - m_p$; à moins de $2\eta\, m(OACB)$ près on aura

$$\int\int \varphi(x, y)\, dx\, dy = \sum_p \int_{\text{inf.}} \left(\int_{\text{inf.}} \varphi(x, y)\, dy\right) dx + \sum_p \int_{\text{inf.}} \left(\int_{\text{inf.}} \varphi'_p(x, y)\, dy\right) dx.$$

Or on a :

$$\int_{\text{inf.}} \left(\int_{\text{inf.}} \varphi(x, y)\, dy\right) dx \leq \sum_p \left\{ \int_{\text{inf.}} \left(\int_{\text{inf.}} \varphi_p(x, y)\, dy\right) dx + \int_{\text{inf}} \left(\int_{\text{inf.}} \varphi'_p(x, y)\, dy\right) dx \right\}.$$

On a donc, quel que soit η

$$\int\int \varphi(x, y)\, dx\, dy \leq \int_{\text{inf.}} \left(\int_{\text{inf.}} \varphi(x, y)\, dy\right) dx + 2\eta \cdot m(OABC).$$

De cette inégalité et de l'inégalité analogue relative aux intégrales supérieures, résulte la formule annoncée.

39. Si la fonction donnée est telle que tous les ensembles e'_p soient mesurables (B), auquel cas on pourra dire que la fonction est sommable (B), la formule se simplifie et devient

$$\int\int_{OACB} \varphi(x, y)\, dx\, dy = \int_0^A \left(\int_0^B \varphi(x, y)\, dy \right) dx.$$

C'est la formule classique. On sait que cette formule doit être remplacée par une formule plus compliquée, analogue à celle que nous avons obtenue, quand on s'occupe de l'intégration, au sens de Riemann, appliquée dans toute sa généralité (*).

Parmi les fonctions sommables (B) on peut citer les fonctions continues, les limites de fonctions continues ou fonctions de première classe, les limites des fonctions de première classe ou fonctions de seconde classe, et d'une manière générale toutes les fonctions de classe n, n étant fini.

En particulier la formule classique simple est applicable aux fonctions de n variables continues par rapport à chacune d'elles.

Cette formule est aussi applicable aux fonctions f''_{xy}, f''_{yx} (**) si elles existent et sont bornées.

Donc on a :

$$f(x, y) - f(0, y) - f(x, 0) + f(0, 0) = \int_0^x \left(\int_0^y f''_{xy}\, dy \right) dx = \int\int f''_{xy}\, dx\, dy.$$

Cette formule résout le problème qui, dans le cas de deux variables, est l'analogue de celui concernant la recherche des fonctions primitives.

40. On peut étendre quelques-uns des résultats précédents aux fonctions non bornées.

Une fonction non sommable non bornée peut avoir une intégrale inférieure et une intégrale supérieure. Sans qu'il soit nécessaire de reprendre les raisonnements précédents on voit que l'on a :

$$\int\int \varphi(x, y)\, dx\, dy = \int_{\text{inf.}} \left(\int_{\text{inf.}} \varphi(x, y)\, dy \right) dx = \int_{\text{sup.}} \left(\int_{\text{sup.}} \varphi(x, y)\, dy \right) dx$$

(*) Voir Jordan (loc. cit.) §§ 56, 57, 58.

(**) Car elles sont de seconde classe au plus.

toutes les fois que les intégrales qui interviennent dans cette formule ont un sens. Il en est de même pour la formule classique

$$\int\int \varphi(x, y)\, dx\, dy = \int\left(\int \varphi(x, y)\, dy\right) dx.$$

Les raisonnements employés dans ce chapitre ont conduit à une généralisation de la notion d'intégrale définie.

Pour qu'une telle généralisation puisse servir il faut qu'elle satisfasse à certaines conditions que l'on aperçoit facilement et qu'on peut imposer a priori.

Voici quelques unes de ces conditions. Il faut que l'on ait :

$$\int_a^c = \int_a^b + \int_b^c, \qquad \int f + \varphi = \int f + \int \varphi.$$

Il faut que la définition adoptée contienne comme cas particulier celle de Riemann.

Il faut qu'il n'y ait pas de différences notables entre le cas d'une variable et le cas de plusieurs variables.

Enfin, si l'on veut que l'intégration permette de résoudre le problème fondamental du calcul intégral : trouver une fonction connaissant sa dérivée, il faut que l'intégrale définie d'une fonction dérivée, considérée comme fonction de sa limite supérieure, soit une fonction primitive de f.

La définition que j'ai adoptée, au moins pour le cas où la fonction à intégrer est bornée, remplit bien toutes ces conditions. Mais ces conditions ne suffisent pas pour définir l'intégrale d'une fonction bornée, (sauf dans le cas où la fonction est une somme algébrique de fonctions intégrables au sens de Riemann et de fonctions dérivées,) de sorte que les méthodes du premier chapitre (*) n'ont pu être employées.

(*) Ces méthodes sont analogues à celles de M.r Drach. (Essai sur une théorie générale de l'Intégration — Introduction à l'Etude de la Théorie des nombres et de l'Algèbre supérieure.)

Voir à ce sujet la note 1, page 48 de l'ouvrage de M.r Borel.

Voir aussi Hadamard. *Géométrie Elémentaire*, 1ère Partie. Note *D*.

Ne pouvant démontrer que la définition proposée était la seule remplissant les conditions imposées, j'ai essayé de montrer qu'elle était naturelle et qu'au point de vue géométrique elle apparaissait presque comme nécessaire.

J'ai essayé de plus de montrer qu'elle était utile : elle permet en effet de résoudre le problème fondamental du calcul différentiel dans tous les cas où la fonction dérivée est bornée, et, comme conséquence, elle permet d'intégrer des équations différentielles qui se ramènent à des quadratures. Par exemple, $f(x)$ étant une fonction bornée quelconque, nous saurons reconnaître si l'équation :

$$y' + a y = f(x)$$

admet des solutions et, si elle en admet, les trouver (*).

Dans les chapitres suivants, où il est question des notions de longueur et d'aire, on trouvera des applications géométriques de l'intégration.

CHAPITRE III.

Longueur des courbes.

41. Nous nous proposons dans ce chapitre de définir la *longueur d'une courbe plane ou gauche* (**).

Ces mots — longueur d'une courbe — sont d'un emploi constant dans le langage usuel. On sait par exemple mesurer la longueur d'une route, d'une rampe d'escalier. Supposons que l'on effectue cette mesure à l'aide d'une règle rigide ; le procédé employé montre que l'on appelle ordinairement longueur d'une courbe, ou plus exactement valeur approchée de cette longueur, la

(*) Cette remarque conduit à des problèmes intéressants. Par exemple, $f(x)$ et $\varphi(x)$ étant bornées, toutes les solutions de l'équation

$$y' + f(x) y = \varphi(x)$$

sont-elles comprises dans la formule classique $y = \int \varphi(x) e^{\int f(x)dx} dx \,.\, e^{-\int f(x)dx}$?

(**) Une courbe gauche se définit comme une courbe plane à l'aide de trois équations au lieu de deux.

longueur, c'est-à-dire la somme des longueurs des côtés de lignes polygonales qui se confondent avec la courbe au degré de précision que l'on peut atteindre.

Lorsque l'on raisonne sur la longueur d'une courbe comme sur un nombre déterminé, on fait l'hypothèse que, par des mesures convenables, on obtient des valeurs approchées ayant une limite que l'on appelle la longueur de la courbe considérée.

La longueur d'une courbe C

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t)$$

est ainsi définie comme limite des longueurs de lignes polygonales tendant uniformément vers la courbe, c'est-à-dire que les coordonnées de la $p^{ième}$ de ces lignes C_p s'expriment par

$$x = f_p(t), \qquad y = \varphi_p(t), \qquad z = \psi_p(t),$$

f_p, φ_p, ψ_p tendant uniformément vers f, φ, ψ.

Nous dirons que C est la limite des C_p.

Si, quelle que soit la suite de lignes polygonales tendant vers une courbe C, la suite correspondante des longueurs avait une limite, qui serait par conséquent indépendante des lignes polygonales choisies, ce qui précède suffirait à définir la longueur de la courbe C. Mais il n'en est pas ainsi et l'on peut choisir les lignes polygonales de façon que leurs longueurs augmentent indéfiniment.

Donner une définition de la longueur d'une courbe, c'est donc dire quelle suite de lignes polygonales on choisit.

D'après M.r Peano (*), les postulats qu'admettait Archimède équivalent à la définition suivante:

La longueur d'un arc de courbe plane convexe est la valeur commune de la limite supérieure des longueurs des lignes polygonales inscrites et de la limite inférieure des circonscrites.

Archimède démontre d'ailleurs l'identité des limites dans les cas qu'il étudie.

La définition ordinairement adoptée est la suivante:

(*) *Atti della Reale Accademia dei Lincei.* Rendiconti 1900, 1.° Semestre.

La longueur d'un arc de courbe est la limite vers laquelle tend la longueur d'une ligne polygonale inscrite dans la courbe quand le nombre des côtés de cette ligne augmente indéfiniment de façon que la longueur maximum des côtés de cette ligne tende vers zéro (*).

M.r Peano adopte la première partie de la définition d'Archimède: la longueur d'une courbe est la limite supérieure des lignes polygonales inscrites.

L'identité de ces définitions se démontre facilement, elle résulte d'ailleurs des résultats que nous allons obtenir.

42. Si l'on veut qu'il y ait quelque analogie entre le sens vulgaire et le sens mathématique du mot longueur, il ne faut essayer de définir la longueur d'une courbe C, que s'il existe une suite de lignes polygonales ayant C pour limite et telle que la suite correspondante de longueurs n'augmente pas indéfiniment. Nous appellerons ces courbes, *courbes rectifiables.*

Pour définir la longueur de ces courbes, rappelons d'abord quelques définitions.

Soit un ensemble de suites de nombres. Les valeurs qui forment l'une de ces suites forment un ensemble E, l'ensemble dérivé de E est l'ensemble de toutes les limites de la suite considérée. L'ensemble des ensembles E' ainsi définis est l'ensemble des limites des suites de l'ensemble considéré; la limite supérieure de cet ensemble est ce que l'on appelle depuis Cauchy la plus grande des limites. On définit de même la plus petite des limites.

Ces deux nombres, que l'on appelle aussi quelquefois limites supérieure et inférieure d'indétermination, peuvent être infinis.

Soit une courbe C, considérons l'ensemble des suites formées des longueurs des lignes polygonales tendant uniformément vers C.

La plus grande des limites de l'ensemble est infinie. Il en est de même de la plus petite si C n'est pas rectifiable. Au contraire si C est rectifiable la plus petite des limites est finie.

Nous appellerons longueur d'une courbe C, la plus petite des limites vers lesquelles tendent les longueurs des lignes polygonales tendant uniformément vers C.

Une courbe rectifiable a une longueur finie.

(*) Les conséquences de cette définition ont été particulièrement étudiées par Ludwig Scheeffer (*Acta Mathematica*, tome V) et par M.r Jordan dans la seconde édition de son cours d'Analyse. Voir aussi Study. *Mathematische Annalen*, XLV.

Une courbe non rectifiable n'a pas de longueur, ou si l'on veut a une longueur infinie.

43. Soit une courbe C d'extrémités A et B. Toute ligne polygonale dont les extrémités tendent vers A et B a une longueur qui ne peut tendre vers un nombre inférieur à la longueur de $A\,B$. C'est-à-dire que la longueur d'un arc de courbe n'est pas inférieure à la longueur de la corde.

Marquons sur l'arc $A\,B$ entre A et B un point D. L'arc $A\,B$ est dit la somme des arcs $A\,D$ et $D\,B$ et la longueur de l'arc $A\,B$ est évidemment la somme des longueurs des arcs $A\,D$ et $D\,B$. Donc la longueur de l'arc $A\,B$ n'est pas inférieure à $A\,D + D\,B$.

En raisonnant ainsi on voit que la longueur de l'arc est supérieure ou au moins égale à celle d'une ligne polygonale quelconque inscrite (*).

Considérons une suite de lignes polygonales inscrites, telles que le maximum de la longueur des côtés tende vers zéro. Ces lignes tendant uniformément vers la courbe, la plus petite limite de la suite correspondante des longueurs n'est pas inférieure à la longueur de la courbe C. Mais d'après ce que nous venons de voir tous les nombres de cette suite sont au plus égaux à la longueur de C; la plus grande limite est au plus égale à cette longueur.

Donc la suite des longueurs considérées a pour limite la longueur de C et il y a identité entre la définition que nous avons adoptée et la définition classique, celle de Scheeffer et de M.r Jordan.

Nous avons en même temps démontré l'identité de cette définition et de celle de M.r Peano.

En adoptant la définition qui a été donnée, on obtient une analogie complète entre les définitions des longueurs et des aires. L'identité de cette définition et de la définition classique nous permet de trouver la longueur par une infinité dénombrable d'opérations.

44. Nous disons qu'une courbe C

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t) \tag{1}$$

est la limite d'une famille de courbes C_p

$$C_p \qquad x = f_p(t), \qquad y = \varphi_p(t), \qquad z = \psi_p(t),$$

si f_p, φ_p, ψ_p tendent uniformément vers f, φ, ψ.

(*) On suppose bien entendu que, dans l'ordre où ils se présentent sur la ligne polygonale, les sommets de cette ligne correspondent à des valeurs croissantes de t.

De ce qui précède résulte que la longueur de C est au plus égale à la plus petite limite des longueurs des C_p, et qu'il existe des familles de courbes C_p telles que la longueur de C soit la limite des longueurs des C_p. C'est ce que nous exprimerons en disant que la longueur d'une courbe C est la plus petite limite des longueurs des courbes dont C est la limite (*). On peut donc poser ainsi le problème de la mesure des longueurs des courbes.

Attacher à chaque courbe un nombre positif fini ou infini que l'on appellera sa longueur et satisfaisant aux conditions suivantes :

1.° *Il existe des courbes ayant une longueur finie.*

2.° *Deux courbes égales* (**) *ont même longueur.*

3.° *Une courbe somme de deux autres* (***) *a pour longueur la somme des longueurs de ces deux autres.*

4.° *La longueur d'une courbe C est la plus petite limite des longueurs des lignes polygonales dont C est la limite.*

45. Soit C une courbe rectifiable, la longueur $(0, t)$ de l'arc $s(t)$ est une fonction croissante de t. Donc les quantités $s(\theta - 0)$, $s(\theta + 0)$ existent. Considérons la courbe $C(\varepsilon)$ formée de l'arc $(0, \theta - \varepsilon)$ de la droite $\theta - \varepsilon$, $\theta + \varepsilon$ et de l'arc $(\theta + \varepsilon, \theta + h)$. Quand ε tend vers zéro $C(\varepsilon)$ tend vers C. Or la longueur de $C(\varepsilon)$ est

$$s(\theta - \varepsilon) + [s(\theta + h) - s(\theta + \varepsilon)] + \text{long}\,[\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon].$$

En faisant tendre ε vers zéro, on déduit :

$$s(\theta + h) \leqq s(\theta - 0) + [s(\theta + h) - s(\theta + 0)]$$

d'où il résulte $s(\theta + 0) = s(\theta - 0)$ et $s(t)$ est une fonction continue de t.

Il existe des courbes dont aucun arc n'est rectifiable. Il en est ainsi,

(*) Si l'on considère la longueur comme fonction de la courbe, on peut dire que la fonction est partout égale à son minimum ou encore semi-continue inférieurement (Baire, loc. cit.).

(**) Deux courbes sont égales si l'on passe des formules qui définissent la première à celles qui définissent la seconde par les formules du changement de coordonnées.

(***) Si les deux courbes composantes sont données par $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$, $z = \psi(t)$, $a \leqq t \leqq b$ et $x = f_1(t)$, $y = \varphi_1(t)$, $z = \psi_1(t)$, $a_1 \leqq t \leqq b_1$, avec $f(b) = f(a_1)$, $\varphi(b) = \varphi(a_1)$, $\psi(b) = \psi(a_1)$. La courbe somme est définie par $x = F(t)$, $y = \Phi(t)$, $z = \Psi(t)$ avec $F = f$, $\Phi = \varphi$, $\Psi = \psi$, si $a \leqq t \leqq b$ et $F(t + b - a_1) = f_1(t)$, $\Phi(t + b - a_1) = \varphi_1(t)$, $\Psi(t + b - a_1) = \psi_1(t)$ si $b \leqq t \leqq b + b_1 - a_1$.

pour certaines valeurs de a et de b, de la courbe

$$x = \sum_0^\infty b^n \cos a^n \pi t, \qquad y = 0, \qquad z = 0 \text{ (*)}.$$

Soit une courbe Γ somme d'une courbe rectifiable C et d'une courbe C_1 dont aucun arc n'est rectifiable. Si C correspond à l'intervalle $(0, \theta)$, $s(t)$ est une fonction continue croissante entre 0 et θ, puis pour t supérieur à θ cette fonction devient infinie.

46. Nous appellerons projection de la courbe (1) sur l'axe des x la courbe

$$x = f(t), \qquad y = 0, \qquad z = 0\,;$$

et sur le plan des xy la courbe

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = 0.$$

A un polygone inscrit dans la courbe (1) correspond un polygone inscrit dans la courbe projection.

Chaque côté d'un polygone projection est au plus égal au côté projeté, donc *les projections d'une courbe rectifiable sont rectifiables.*

D'ailleurs un côté projeté a une longueur au plus égale à la somme des longueurs des trois côtés projections sur les trois axes de coordonnées, donc *si une courbe a des projections rectifiables sur les trois axes de coordonnées elle est rectifiable.*

47. Cherchons la forme la plus générale de la fonction $f(t)$ pour que la courbe $x = f(t)$ portée par l'axe des x soit rectifiable.

Considérons un polygone inscrit dans cette courbe, ses sommets correspondent aux valeurs croissantes $a = t_0,\ t_1 \ldots t_n = b$ de t. La longueur de ce polygone est $\Sigma\,|f(t_i) - f(t_{i-1})|$, cette quantité s'appelle encore la variation de f pour le système de valeurs $t_0,\ t_1 \ldots t_n$.

Cette somme se décompose en deux autres Σ_1, Σ_2. La première correspondant aux termes $f(t_i) - f(t_{i-1})$ qui sont positifs, la seconde aux termes négatifs. On les appelle *variation positive* et *variation négative* de f pour le système $t_0,\ t_1 \ldots t_n$.

Supposons que a et b restant fixes, le nombre des t_i augmente indéfiniment de manière que le maximum de $t_i - t_{i-1}$ tende vers zéro. Dès que ce

(*) Voir JORDAN, (loc. cit.), page 318.

maximum est inférieur à un certain nombre η, $\Sigma_1 + \Sigma_2$ diffère de la longueur de l'arc de a à b de moins de ε, si cette longueur est finie, et est plus grande que M, si la longueur de l'arc de a à b est infinie; sans quoi il serait possible de trouver une suite de polygones inscrits tendant vers la courbe et dont les longueurs ne tendraient pas vers celle de la courbe (*). Donc $\Sigma_1 + \Sigma_2$ a pour limite la longueur de l'arc (a, b); cette quantité $s = v$ s'appelle la variation totale de f entre a et b. Si cette variation est finie, la fonction f est dite à variation bornée entre a et b. Si la variation est infinie la fonction est à variation non bornée.

$\Sigma_1 - \Sigma_2$ est toujours égale à $f(b) - f(a)$, donc a pour limite $f(b) - f(a)$.

De là il résulte que Σ_1 et Σ_2 ont des limites parfaitement déterminées p et n que l'on appelle la variation positive et la variation négative de f entre a et b; et l'on a:

$$p + n = v$$

$$p - n = f(b) - f(a).$$

Nous avons vu que si a est fixe, v est une fonction continue de b pour les fonctions à variation bornée. De ces formules il résulte que p et n qui sont des fonctions croissantes, ou du moins jamais décroissantes, sont des fonctions continues. La formule

$$f(b) = f(a) + p - n$$

montre que toute fonction continue à variation bornée est la différence de deux fonctions continues non décroissantes.

Pour une fonction continue croissante n est nulle, donc une fonction croissante est à variation bornée. D'ailleurs si

$$f = \varphi - \psi,$$

$$|f(t_i) - f(t_{i-1})| \leq |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| + |\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})|$$

donc la différence de deux fonctions à variation bornée est une fonction à variation bornée.

Il y a donc identité entre les fonctions à variation bornée et les différences de fonctions continues non décroissantes (**).

(*) En d'autres termes si des polygones inscrits T tendent vers C la longueur de T tend uniformément vers celle de C.

(**) On peut dans cet énoncé supprimer le mot *continues*, (voir à ce sujet Jordan, loc. cit.).

Si

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t)$$

sont les équations d'une courbe rectifiable, f, φ, ψ sont des différences de deux fonctions continues non décroissantes et inversement.

48. Voici des exemples de fonctions à variation bornée.

Soit dans l'intervalle (0, 1) un ensemble dénombrable de couples de points a_i, b_i ($a_i < b_i$), tels qu'entre a_i et b_i ne se trouve aucun point a ou b d'indice inférieur à i.

Désignons par $f_0(x)$ la fonction x, et par $f_p(x)$ la fonction continue qui admet $a_1, a_2, \ldots a_p, b_1, b_2, \ldots b_p$ pour maxima ou minima, qui entre deux de ces points est de la forme $\pm x + h$ et qui est égale à $f_0(x)$ entre 0 et le premier des points d'indice au plus égal à p.

On voit immédiatement que le maximum de $|f_p(x) - f_{p-1}(x)|$ s'obtient pour $x = b_p$ et est égal à $2\,|f_{p-1}(a_p) - f_{p-1}(b_p)| = 2\,\varepsilon_p$, si ε_p désigne la longueur $a_p b_p$.

Donc si la série $\Sigma\,\varepsilon_p$ est convergente $f_p(x)$ tend uniformément vers une limite $f(x)$; et comme $f_p(x)$ a entre 0 et x une variation totale égale à x, celle de $f(x)$ est au plus x.

Pour les points d'indice au plus égal à p on a:

$$|f(x) - f_p(x)| \leq 2 \sum_{h=1}^{h=\infty} \varepsilon_{p+h}\,.$$

La variation de $f(x)$ pour le système $a_1, \ldots a_p$, $b_1, \ldots b_p$ est donc supérieure à

$$x - 4\,p\,\Sigma\,\varepsilon_{p+h}$$

donc si $p\,\Sigma\,\varepsilon_{p+h}$ tend vers zéro avec $\frac{1}{p}$, $f(x)$ a x pour variation totale entre 0 et x.

Soit un intervalle (α, β), si, les conditions précédentes étant remplies, l'ensemble des a_p est partout dense on peut trouver dans (α, β) un intervalle (a_p, b_p). Supposons qu'entre a_p et b_p $f_p(x)$ soit de la forme $x + h_1$, on a:

$$f(b_p) - f(a_p) = f_p(b_p) - f_p(a_p) + [f(b_p) - f_p(b_p)] +$$
$$+ [f_p(a_p) - f(a_p)] \geq \varepsilon_p - 4 \sum_{h=1}^{h=\infty} \varepsilon_{p+h}\,;$$

donc si, au moins à partir d'une certaine valeur de p, on a:

$$\varepsilon_p > 4\,\Sigma\,\varepsilon_{p+h}$$

$f(x)$ n'est pas toujours décroissante de a_p à b_p et a fortiori de α à β. Mais de même on prouverait qu'elle n'est pas croissante, donc *dans tout intervalle* $f(x)$ *admet des maxima et des minima.*

Pour réaliser toutes ces conditions prenons pour l'ensemble des milieux des (a_i, b_i) l'ensemble des nombres rationnels rangés dans un ordre quelconque. Prenons pour ε_1 un nombre irrationnel quelconque, tel que a_1 et b_1 soient compris entre 0 et 1. Prenons pour ε_i le plus petit des nombres $\frac{\varepsilon_{i-1}}{1}$, $\frac{\varepsilon_{i-1}}{2}$, $\frac{\varepsilon_{i-1}}{3}\ldots$ tels que a_i et b_i soient compris entre 0 et 1 et qu'entre a_i et b_i ne se trouve aucun des points $a_1, a_2, \ldots a_{i-1}, b_1, b_2 \ldots b_{i-1}$.

Nous définirons ainsi une fonction dont la variation totale entre 0 et x est x et qui a dans tout intervalle des maxima et des minima.

Traçons par rapport à deux axes rectangulaires la droite $z = x$. Soient A_i, B_i les points de cette droite dont les abscisses sont a_i, b_i.

Plions la feuille de papier sur laquelle nous avons tracé $z = x$ d'abord suivant la parallèle à $0x$ passant par A_1 puis suivant la parallèle à $0x$ passant par B_1, nous réalisons la courbe $z = f_1(x)$. En pliant de nouveau le papier autour des parallèles à $0x$ passant par A_2 et B_2 on réalise $z = f_2(x)$ et ainsi de suite.

Donc, avec une précision qui n'est limitée que par la possibilité d'effectuer le pliage, on peut réaliser les courbes $z = f(x)$ que nous venons de définir. On peut même démontrer qu'en choisissant convenablement les A_i, B_i on peut réaliser toute courbe $z = f(x)$ de variation totale entre 0 et x égale à x.

49. On sait que, dans le cas simple où les fonctions f, φ, ψ ont des dérivées continues on peut représenter la longueur par une intégrale. Voici une première généralisation simple. Nous supposons que f', φ', ψ' existent, soient bornées et intégrables au sens de Riemann.

Soit AB une corde, dont les extrémités correspondent aux valeurs t_i, t_{i+1} du paramètre. On a:

$$\text{Longueur } AB = \sqrt{\overline{f(t_{i+1}) - f(t_i)}^2 + \overline{\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)}^2 + \overline{\psi(t_{i+1}) - \psi(t_i)}^2}\ (*).$$

Désignons par m_1, M_1; m_2, M_2; m_3, M_3 les limites inférieures et supérieures de $|f'(t)|$, $|\varphi'(t)|$, $|\psi'(t)|$ entre t_i et t_{i+1}.

(*) Nous supposons les axes rectangulaires.

Le théorème des accroissements finis montre que

$$(t_{i+1}-t_i)\sqrt{m_1^2+m_2^2+m_3^2} \leqq \text{Long}\, A\, B \leqq \sqrt{M_1^2+M_2^2+M_3^2}\,(t_{i+1}-t_i).$$

Soit une division $t_0, t_1, \dots t_n$ de l'intervalle de variation de t; il lui correspond un polygone inscrit P et l'on a:

$$\Sigma\,(t_{i+1}-t_i)\sqrt{m_1^2+m_2^2+m_3^2} \leqq \text{Long}\, P \leqq \Sigma\,(t_{i+1}-t_i)\sqrt{M_1^2+M_2^2+M_3^2}\,.$$

Si entre les t_i choisis on intercale de nouvelles valeurs de t, la première somme augmente la troisième diminue, donc elles tendent vers des limites quand on fait tendre vers zéro $t_{i+1}-t_i$; d'ailleurs ces deux limites sont égales car la différence entre le premier et le troisième membre est au plus

$$\Sigma\,(t_{i+1}-t_i)\,[(M_1-m_1)+(M_2-m_2)+(M_3-m_3)]$$

quantité qui tend vers zéro car $|f'|$, $|\varphi'|$, $|\psi'|$ sont intégrables puisque f', φ', ψ', le sont.

L'expression

$$\Sigma\,(t_{i+1}-t_i)\sqrt{f'^2(t)+\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}, \quad \left(t=\frac{t_i+t_{i+1}}{2}\right)$$

est comprise entre la première et la troisième somme, sa limite est l'intégrale

$$\int\sqrt{f'^2+\varphi'^2+\psi'^2}\,d\,t$$

qui représente donc la longueur de la courbe.

50. Servons nous maintenant des résultats obtenus dans le chapitre précédent.

Si f', φ', ψ' existent et si la courbe est rectifiable, ces dérivées admettent des intégrales et il en est par suite de même de $\sqrt{f'^2+\varphi'^2+\psi'^2}$. Réciproquement si cette quantité admet une intégrale, il en est de même de f', φ', ψ', car l'on a:

$$\sqrt{f'^2+\varphi'^2+\psi'^2} \geqq |f'|,$$

et la courbe est rectifiable.

Nous n'avons donc à nous occuper de l'intégrale de $\sqrt{f'^2+\varphi'^2+\psi'^2}$ que pour les courbes rectifiables. Pour démontrer que cette intégrale représente la longueur de la courbe nous raisonnerons comme dans le chapitre précédent.

Divisons les intervalles de variation (finis ou non) de f', φ', ψ' à l'aide de nombres m_i. Il en résulte une division en ensembles de l'intervalle de variation de t,

Pour ceux que nous nommerons e_{ijk} on a:

$$m_i < f' < m_{i+1}$$
$$m_j < \varphi' < m_{j+1}$$
$$m_k < \psi' < m_{k+1}.$$

Pour ceux que nous nommerons $e^i_{\alpha jk}$, la première de ces inégalités est remplacée par:

$$m_i = f'.$$

Nous aurons de même $e^j_{i\alpha k}$ $e^k_{ij\alpha}$; dans ces expressions α est un symbole indiquant celle des inégalités qui est remplacée par une égalité et non l'un des nombres entiers.

Nous aurons encore les ensembles $e^{ij\alpha}_k$, les deux premières inégalités sont remplacées par

$$m_i = f', \qquad m_j = \varphi'.$$

Enfin nous aurons des ensembles e^{ijk} pour lesquels f', φ', ψ' seront égales à m_i, m_j, m_k.

Tous ces ensembles sont mesurables; en choisissant convenablement les m_i tous ces ensembles, sauf les e_{ijk}, seront de mesure nulle.

A chaque point t_0 de e_{ijk} nous pouvons faire correspondre le plus grand intervalle possible (α, β) de longueur inférieure à σ_{ijk}, ayant t_0 pour milieu et tel que

$$\alpha < a \leqq t_0 \leqq b < \beta$$

entraîne

$$m_i < \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < m_{i+1}$$

$$m_j < \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{b - a} < m_{j+1}$$

$$m_k < \frac{\psi(b) - \psi(a)}{b - a} < m_{k+1}.$$

Soit $E_{ijk}(\sigma_{ijk})$ la somme de ces intervalles. Faisons tendre σ_{ijk} vers zéro, l'ensemble E_{ijk} des points communs à tous les $E_{ijk}(\sigma_{ijk})$ a même mesure que e_{ijk}.

A chaque point t_0 de $e^i_{\alpha jk}$ nous pouvons faire correspondre le plus grand intervalle possible (α, β) de longueur inférieure à $\sigma^i_{\alpha jk}$, ayant t_0 pour milieu

et tel que

$$\alpha < a \leq t_0 \leq b < \beta$$

entraîne

$$m_i - \varepsilon^i_{ajk} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < m_i + \varepsilon^i_{ajk}$$

$$m_j < \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{b - a} < m_{j+1}$$

$$m_k < \frac{\psi(b) - \psi(a)}{b - a} < m_{k+1}.$$

Soit E^i_{ajk} (σ^i_{ajk}) la somme de ces intervalles.

Faisons tendre simultanément σ^i_{ajk} et ε^i_{ajk} vers zéro, l'ensemble E^i_{ajk} formé des points communs à tous les $E^i_{ajk}(\sigma^i_{ajk})$, a même mesure que e^i_{ajk}. On définira de même E^{ija}_k (σ^{ija}_k), E^{ijk} (σ^{ijk}).

Si $m_{i+1} - m_i$ est, quel que soit i, inférieur à η l'intégrale de $\sqrt{f'^2 + \varphi'^2 + \psi'^2}$ est égale à

$$\sum_{ijk} \sqrt{m_i^2 + m_j^2 + m_k^2}\, [m(e_{ijk}) + m(e^i_{ajk}) \ldots + m(e^{ijk})]$$

à moins de $2\eta l$ près, l'intégrale étant étendue à un intervalle de longueur l. Or on peut choisir les nombres σ et ε assez petits, pour que cette somme diffère aussi peu qu'on le veut, de moins de D, de

$$V = \sum_{ijk} \sqrt{m_i^2 + m_j^2 + m_k^2} \Big[m\,[E_{ijk}(\sigma_{ijk})] + m\,[E^i_{ajk}(\sigma^i_{ajk})] + \ldots + m[E^{ijk}(\sigma^{ijk})] \Big].$$

Parmi les intervalles formant les E on en peut choisir un nombre fini de manière que tout point de l'intervalle considéré soit intérieur à l'un des intervalles conservés et que les extrémités de l'intervalle considéré soient des extrémités d'intervalles conservés.

Nous supposerons ces intervalles conservés A choisis de façon qu'aucun d'eux ne soit à l'intérieur d'un autre. La contribution dans V des intervalles non conservés est inférieure à D.

Considérons deux intervalles conservés (a, b), (a_1, b_1) empiétant l'un sur l'autre et soit

$$a < a_1 < b < b_1;$$

supposons qu'ils correspondent à $E_{ijk}(\sigma_{ijk})$ et $E_{i'j'k'}$ $(\sigma_{i'j'k'})$. Entre a_1 et b on peut trouver un point c tel que entre a et c se trouve un point au moins de e_{ijk} et entre c et b_1 un point au moins de $e_{i'j'k}$; en effet s'il en était au-

trement c'est que tous les points de e_{ijk} et $e_{i'j'k'}$ contenus dans $a\,b_1$ seraient entre a et b (ou entre a_1 et b_1) et en prenant dans a, b deux points α et β suffisamment voisins de a et b on aurait à la fois

$$m_i < \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} < m_{i+1}$$

$$m_{i'} < \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} < m_{i'+1}$$

et les inégalités analogues. Or on n'a pas à la fois $i=i'$, $j=j'$, $k=k'$.

Nous remplacerons les intervalles (a, b), (a_1, b_1) par (a, c), (c, b_1). On aurait pu faire de même pour des intervalles correspondant à E^i_{ijk}, $E^{ij\alpha}_k$...

Il n'y a de difficulté que si les trois indices sont identiques, c'est-à-dire par exemple si les deux intervalles correspondent à E^i_{ijk}, $E^{\alpha jk}_i$, auquel cas on prendra comme point c un point quelconque de (a_1, b).

En continuant ainsi on remplace les intervalles A par des intervalles A' n'empiétant plus les uns sur les autres. La contribution dans V des intervalles $A - A'$ est inférieure à D.

Considérons maintenant la ligne polygonale inscrite dans la courbe et dont les sommets correspondent aux extrémités de A'.

Le côté de cette ligne qui correspond à l'intervalle (α, β) a une longueur égale à $(\beta-\alpha)\sqrt{m_i^2+m_j^2+m_k^2}$ à moins de

$$3\,\eta\,(\beta-\alpha) \quad \text{ou} \quad (2\,\eta+\varepsilon^i_{ijk})(\beta-\alpha) \quad \text{ou} \quad (\eta+2\,\varepsilon^k_{ij\alpha})(\beta-\alpha)\ldots$$

près, suivant que (α, β) correspond à E_{ijk}, E^i_{ijk}, $E^{ij\alpha}_k$...

Si donc les ε sont choisis assez petits, la longueur de la ligne polygonale diffère de la contribution de A' dans V de moins de $3\,\eta\,l$.

Ainsi, en choisissant convenablement les nombres η, σ, ε, le procédé que nous venons d'indiquer conduit à considérer une ligne polygonale inscrite dans la courbe, dont les côtés sont aussi petits que l'on veut, et dont la longueur est aussi voisine que l'on veut de l'intégrale

$$\int\sqrt{f'^2+\varphi'^2+\psi'^2}\,d\,t.$$

Cette intégrale représente donc la longueur de la courbe.

51. Les raisonnements que nous venons d'indiquer sont analogues à ceux des paragraphes 30, 31. D'une façon plus générale, à tout raisonnement de la deuxième partie du chapitre II, on peut faire correspondre des raisonne-

ments relatifs à la rectification des courbes. Nous allons indiquer ce qui est l'analogue de la proposition du paragraphe 35.

Dans ce paragraphe il a été démontré que si les nombres dérivés d'une fonction $f(t)$ sont bornés et si les h_i sont des nombres positifs tendant vers zéro on a :

$$\int \lambda_d(t)\,dt < \text{Lim} \int \frac{f(t+h_i)-f(t)}{h_i}\,dt < \int \Lambda_d(t)\,dt.$$

Un raisonnement analogue prouve que, si l'on désigne par D_d et d_d la plus grande et la plus petite des deux quantités $|\Lambda_d|$ et $|\lambda_d|$, on a :

$$\int d_d\,dt < \text{Lim} \int \left| \frac{f(t+h_i)-f(t)}{h_i} \right| dt < \int D_d\,dt$$

et aussi que les limites de

$$\int \left| \frac{f(t+h_i)-f(t)}{h_i} - \Lambda_d(t) \right| dt \quad \text{et} \quad \int \left| \frac{f(t+h_i)-f(t)}{h_i} - \lambda_d(t) \right| dt$$

sont inférieures à $\int (D_d - d_d)\,dt$.

Ceci posé soit $C(h_i)$ la courbe

$$x = \frac{F(t+h_i)-F(t)}{h_i}, \qquad y = \frac{\Phi(t+h_i)-\Phi(t)}{h_i}, \qquad z = \frac{\Psi(t+h_i)-\Psi(t)}{h_i}$$

$F(t)$, $\Phi(t)$, $\Psi(t)$ étant les fonctions primitives de $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ dont nous supposons les nombres dérivés bornés. $C(h_i)$ a pour longueur

$$l_i = \frac{1}{h_i} \int \sqrt{[f(t+h_i)-f(t)]^2 + [\varphi(t+h_i)-\varphi(t)]^2 + [\psi(t+h_i)-\psi(t)]^2}\,dt.$$

Quand h_i tend vers zéro les limites de l_i sont comprises entre

$$\int \sqrt{\overline{D_d(f)}^2 + \overline{D_d(\varphi)}^2 + \overline{D_d(\psi)}^2}\,dt \quad \text{et} \quad \int \sqrt{\overline{d_d(f)}^2 + \overline{d_d(\varphi)}^2 + \overline{d_d(\psi)}^2}\,dt.$$

Nous supposerons que ces deux intégrales ont la même valeur, alors l_i tend vers une limite déterminée que nous allons démontrer être la longueur de C.

Si ces deux intégrales ont la même valeur c'est que les couples d'intégrales $\int D_d\,dt$ et $\int d_d\,dt$ ont aussi les mêmes valeurs et ces intégrales représentent les variations totales de f, φ, ψ. D'ailleurs comme l'on a :

$$D_d - d_d \leq \Lambda_d - \lambda_d \leq 2\,D_d,$$

les couples d'intégrales $\int \Lambda_d \, d\, t$ et $\int \lambda_d \, d\, t$ ont aussi les mêmes valeurs et réciproquement.

De sorte que l'on a:

$$\int D_d \, d\, t = \int d_d \, d\, t = \int |\Lambda_d| \, d\, t = \int |\lambda_d| \, d\, t.$$

Considérons une ligne polygonale inscrite dans $C(h_i)$ correspondant à

$$t_0 \, t_1 \ldots t_n$$

et la ligne analogue inscrite dans C. Soient $A_i B_i$ d'une part, $A\,B$ d'autre part deux côtés correspondants $(t_\alpha, \; t_{\alpha+1})$. Les projections du premier sur les trois axes sont

$$\int_{t_\alpha}^{t_{\alpha+1}} \frac{f(t+h_i)-f(t)}{h_i} \, d\, t, \quad \int_{t_\alpha}^{t_{\alpha+1}} \frac{\varphi(t+h_i)-\varphi(t)}{h_i} \, d\, t, \quad \int_{t_\alpha}^{t_{\alpha+1}} \frac{\psi(t+h_i)-\psi(t)}{h_i} \, d\, t$$

celles du second sont

$$\int_{t_\alpha}^{t_{\alpha+1}} \Lambda_d(f) \, d\, t, \quad \int_{t_\alpha}^{t_{\alpha+1}} \Lambda_d(\varphi) \, d\, t, \quad \int_{t_\alpha}^{t_{\alpha+1}} \Lambda_d(\psi) \, d\, t.$$

La différence entre les longueurs de ces deux côtés est donc au plus égale à la somme des valeurs des trois intégrales analogues à

$$\left| \int_{t_\alpha}^{t_{\alpha+1}} \left[\frac{f(t+h_i)-f(t)}{h_i} - \Lambda_d(f) \right] d\, t \right|.$$

Donc la différence des longueurs entre les deux polygones considérés est au plus

$$S_{f,\varphi,\psi} \int \left| \frac{f(t+h_i)-f(t)}{h_i} - \Lambda_d(f) \right| d\, t.$$

Or chacune des trois intégrales de cette somme tend vers zéro avec h_i donc la longueur de C_i a pour limite la longueur de C.

Pour énoncer ce résultat donnons la définition suivante: Soit $f(t)$ une fonction continue, nous appellerons dérivée à droite $f'_d(t)$ une fonction définie

pour $t = t_0$ comme égale à l'une quelconque des limites vers lesquelles tend

$$\frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$$

quand h tend en décroissant vers zéro.

La dérivée à droite est en général indéterminée. Nous venons de démontrer que :

Si les dérivées à droite $f'_d(t)$, $\varphi'_d(t)$, $\psi'_d(t)$ sont bornées et si l'intégrale

$$\int \sqrt{f'_d(t)^2 + \varphi'_d(t)^2 + \psi'_d(t)^2}\, dt$$

a une valeur bien déterminée, indépendante des dérivées à droite choisies, cette intégrale est la longueur de la courbe

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t).$$

52. La proposition précédente est une généralisation du résultat classique concernant la représentation de la longueur d'une courbe ayant des tangentes variant d'une façon continue.

Ce résultat classique étant connu, si l'on s'était proposé de généraliser analytiquement la notion de longueur, la proposition précédente aurait pu être prise pour définition; on voit que la longueur ainsi définie ne dépend pas du choix des axes de coordonnées et, en particulier, reste la même si l'on remplace les dérivées à droite par des dérivées à gauche.

Cette définition ne s'applique qu'à des courbes rectifiables. Il serait intéressant de rechercher à quelles courbes rectifiables elle s'applique ou si elle concerne toutes les courbes rectifiables. Si, pour exprimer les points d'une courbe rectifiable, on prend comme paramètre t la longueur de l'arc, on a des fonctions f, φ, ψ dont les nombres dérivés sont bornés; la proposition du paragraphe précédent s'applique toutes les fois que l'ensemble des points pour lesquels l'une des différences telles que $\Lambda_d(f) - \lambda_d(f)$ est différente de zéro a une mesure nulle.

CHAPITRE IV.

Aire des Surfaces.

53. Les mots *aire d'une surface* désignent dans le langage usuel l'aire, c'est-à-dire la somme des aires des faces, de surfaces polyédrales confondues avec la surface considérée au degré de précision que l'on peut atteindre.

En géométrie on considère souvent l'aire d'une surface S comme la limite des aires de certaines surfaces polyédrales ayant S pour limite; définir l'aire c'est alors dire quelle suite de polyèdres l'on considère.

Par analogie avec la définition de la longueur d'une courbe, on a tout d'abord considéré les polyèdres inscrits. C'est ainsi que, d'après M.r Peano (*), les postulats qu'admettait Archimède équivalent à la définition suivante:

L'aire d'une surface convexe est la valeur commune de la limite supérieure des aires des surfaces polyédrales convexes inscrites et de la limite inférieure des circonscrites; — d'ailleurs, dans les cas qu'il étudie, Archimède démontre la coïncidence des deux limites.

Pendant longtemps on a admis que l'aire d'une surface pouvait être définie comme la limite des aires des surfaces polyédrales inscrites (**), le maximum de l'aire des faces et le maximum de la longueur des arêtes tendant vers zéro. Mais Schwarz dans une lettre à Genocchi a montré que les aires des surfaces polyédrales inscrites dans un morceau fini de cylindre de révolution n'avaient pas de limite supérieure. La même observation a été faite par M.r Peano, dans ses leçons de l'Université de Turin en 1881-82, avant la publication de la lettre de Schwarz dans le cours professé à la Faculté des Sciences pendant le second semestre 1882 par Ch. Hermite (second tirage, p. 25).

Si l'on veut définir l'aire par la considération de polyèdres inscrits il faut donc assujettir ces polyèdres à des conditions supplémentaires. On s'est

---

(*) *Atti della Reale Accademia dei Lincei*, Rendiconti 1890.

(**) Aux sommets d'une surface polyédrale inscrite on peut faire correspondre les points du plan (u, v) auxquels correspondent les sommets en tant que points de la surface proposée. A chaque face du polyèdre correspond ainsi un polygone du plan (u, v), nous supposons ici et dans tout ce qui suit que ces polygones n'empiètent pas les uns sur les autres.

quelquefois astreint à ne considérer que les polyèdres dont les angles des faces ne tendent pas vers zéro ou des polyèdres dont les angles des faces avec les plans tangents tendent vers zéro (*). La plupart des restrictions que l'on a ainsi considérées se sont trouvées insuffisantes pour qu'il existe une limite; d'ailleurs elles sont si particulières que, seule, l'existence de la limite légitimerait leur considération.

54. Il nous reste à citer deux définitions (**) dues à HERMITE et à M.r PEANO. Elles présentent ce caractère commun de ne plus reposer sur la considération de polyèdres inscrits et d'admettre, comme généralisation de la division d'une courbe en arcs partiels, la division d'une surface en morceaux par des contours fermés.

HERMITE (***) considère une surface $z = f(x, y)$ ayant des plans tangents variant d'une façon continue. Soient un contour d du plan des xy, m un point intérieur à ce contour, M le point de la surface qui lui correspond, D' le contour situé dans le plan tangent en M à la surface qui a pour projection d et D le contour de la surface qui se projette en d. A D on fait correspondre l'aire de D' (on suppose d quarrable). Ceci posé on divise la surface en morceaux; la somme des nombres attachés aux contours employés est une valeur approchée de l'aire. L'aire est la limite de ces valeurs lorsque le nombre des morceaux augmente indéfiniment de manière que le diamètre maximum de ces morceaux tende vers zéro. (L'existence de la limite suppose que le contour considéré limitant la surface n'est pas quelconque; il en était de même pour les définitions précédentes.)

La définition d'HERMITE fait donc intervenir explicitement les axes de coordonnées, de plus elle n'est pas la généralisation de la définition de la longueur par la considération des polygones inscrits.

(*) Voir au sujet de ces essais de définition la note déjà citée de M.r PEANO.

(**) Dans un article récent (*Ueber die Begriffe Länge, Oberfläche und Volumen — Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 1901) M.r MINKOWSKI adopte pour la longueur et l'aire les définitions suivantes.

De chaque point d'une courbe C comme centre traçons une sphère de rayon r l'ensemble des points intérieurs à l'une au moins de ces sphères est mesurable, soit $V(r)$ sa mesure; la limite, si elle existe, du rapport $\frac{V(r)}{\pi r^2}$ quand r tend vers zéro est dite la longueur de C. De même si $V(r)$ est la mesure de l'ensemble des points dont la distance à l'un des points d'une surface S est inférieure à r, la limite de $\frac{V(r)}{2r}$ définit l'aire de S.

(***) Loc. cit.

La définition de M.r Peano ne présente pas ces inconvénients. Soit une courbe gauche fermée C, on démontre, au moins dans les cas simples, qu'il existe une courbe plane fermée c telle que sur tout plan les projections orthogonales de C et c limitent des aires égales (*); à chaque courbe C on attache le nombre qui représente l'aire du domaine plan limité par c. De même dans la définition de la longueur, à chaque arc partiel on attache la longueur du segment qui joint ses extrémités, c'est-à-dire la longueur du segment qui sur toute droite a même projection orthogonale (**) que l'arc. Ceci posé divisons une surface par des contours fermés; à chaque division nous faisons correspondre la somme des nombres attachés aux contours employés. M.r Peano appelle aire la limite supérieure de la somme de ces nombres.

55. Toutes ces définitions, celle due à M.r Peano exceptée, supposent l'existence de la limite d'une suite de nombres et l'existence de cette limite n'est démontrée que pour les surfaces ayant des plans tangents variant d'une façon continue. Or, dans ce cas, il ne s'agit pas d'attacher à chaque surface un nombre, mais bien d'attacher à chaque surface des domaines plans dont la somme des aires définissent comme limite ou limite supérieure ou limite inférieure un nombre égal à l'intégrale double $\int\int\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$; toute définition géométrique qui ne conduirait pas à ce nombre consacré par l'usage serait en effet rejetée. Une définition de l'aire qui ne s'applique qu'aux surfaces ayant des plans tangents variant d'une façon continue, peut faire connaître une propriété géométrique intéressante, mais n'est pas une véritable définition de l'aire, le nombre à définir étant connu avant la définition.

56. La définition due à M.r Peano s'applique à toutes les surfaces dont la frontière est un de ces contours C auxquels on peut faire correspondre des contours plans c, comme il a été dit plus haut. Mais cette définition n'est vraiment intéressante que si l'on peut sur la surface tracer assez de ces contours C pour qu'il soit possible de diviser la surface en morceaux de diamètres aussi petits que l'on veut et dont les frontières sont des courbes C;

(*) Si la projection de C a des points multiples, l'aire limitée par C doit être comptée comme si elle était exprimée à l'aide de l'intégrale curviligne $\frac{1}{2}\int x\,dy - y\,dx$.

(**) Il ne s'agit pas ici de la courbe projection mais de la distance des deux extrémités de l'arc projection.

dans ce cas seulement l'aire dépend de la forme de toutes les parties de la surface. Cette condition est remplie par exemple si la surface a des plans tangents variant d'une façon continue.

Prenons ce cas, les courbes C forment un ensemble dont la puissance est celle du continu, alors l'aire est définie comme limite supérieure d'un ensemble de nombres dont la puissance est celle du continu.

Pour calculer l'aire il faut, dans cet ensemble, isoler une infinité dénombrable de nombres tendant vers la limite supérieure; on peut démontrer que si l'on considère une suite de divisions de la surface par des contours C, le diamètre maximum de ces contours tendant vers zéro, les nombres correspondant à ces divisions tendent vers l'aire. Mais il n'est pas évident que l'on puisse toujours atteindre par une infinité dénombrable d'opérations le nombre que définit M.r Peano; ajoutons qu'on ne connaît rien d'autre sur ce nombre que son existence.

57. Une surface étant définie par

$$x = f(u, v), \quad y = \varphi(u, v), \quad z = \psi(u, v)$$

(u, v) étant un point d'un domaine plan D.

On ne considère pas comme différentes celles que l'on obtient en exprimant u, v en fonction des coordonnées u_1, v_1 des points d'un domaine D_1; entre D et D_1 existe une correspondance ponctuelle biunivoque et continue. On dit que l'on a deux représentations paramétriques de la même surface.

L'ensemble des points qui correspondent à la courbe qui limite le domaine D forme la courbe frontière de la surface (*).

Deux surfaces sont dites égales si l'on passe de l'une à l'autre par les formules du changement de coordonnées.

Une surface S est dite somme de surfaces S_i, en nombre fini ou non, si le domaine D du plan des (u, v) auquel correspond S est somme des domaines D_i auxquels correspondent les S_i et si la portion de S qui correspond à D_i est identique à S_i.

Une surface S est dite la limite de surfaces S_p données par des fonctions f_p, φ_p, ψ_p, si f_p, φ_p, ψ_p sont définies dans le même domaine que f, φ, ψ et tendent uniformément vers f, φ, ψ.

(*) Nous réservons donc le nom de *surface* à ce que l'on appelle ordinairement une calotte à un seul contour, simplement connexe. — Il faudrait répéter pour les points d'une surface ce qui a été dit au chapitre I pour les points d'une courbe.

Ceci rappelé, par analogie avec le problème de la mesure des courbes, nous posons ainsi le problème de la mesure des surfaces.

Attacher à chaque surface un nombre positif fini ou infini que l'on appellera son aire et satisfaisant aux conditions suivantes :

1.° *Il existe des surfaces planes ayant une aire finie.*

2.° *Deux surfaces égales ont même aire.*

3.° *Une surface somme de plusieurs autres a pour aire la somme des aires des surfaces composantes.*

4.° *L'aire d'une surface S est la plus petite limite des aires des surfaces polyédrales dont S est la limite.*

Les trois premières conditions suffisent, nous l'avons vu, quand on ne considère que des domaines plans. Le problème n'est possible que pour les domaines limités par des courbes quarrables.

Remarquons d'ailleurs qu'il importe peu de modifier ainsi la troisième condition du problème :

3 bis. *Une surface somme de deux autres a pour aire la somme des aires de ces deux autres.*

Les conditions 1, 2, 3 bis suffisent en effet pour les domaines quarrables. Soit maintenant un domaine non quarrable, il est limite de domaines quarrables dont les aires tendent vers la mesure des points du domaine (*); avec M.r Jordan nous appellerons ce nombre l'*aire intérieure* du domaine non quarrable. La condition 4 montre que l'on doit appeler aire l'aire intérieure, mais alors la condition 3 bis n'est pas remplie (**).

Le problème des aires ainsi posé n'est donc possible que pour les domaines quarrables. Il est bien entendu que cela ne veut pas dire que le problème des aires est impossible pour tout autre famille de domaines que celle des domaines quarrables. Il est bien évident par exemple que le problème des aires est possible pour toute famille comprenant un nombre fini de domaines déterminés en grandeur et en position, que ces domaines soient quarrables ou non. Nous voulons dire seulement que le problème n'est pas possible pour l'ensemble de tous les domaines, mais qu'il est possible pour les domaines quarrables.

(*) Rappelons que nous avons appelé domaine l'ensemble des points *intérieurs à la frontière.*

(**) De même il importait peu dans la 3e condition du problème de la mesure des courbes de parler d'une courbe somme de deux autres ou d'une courbe somme de plusieurs autres.

On démontrera facilement que, si l'on pose le problème avec les conditions 1, 2, 3, 4, il n'existe aucune famille de domaines formée des domaines quarrables et d'autres domaines, pour laquelle le problème des aires soit possible; au contraire il existe de telles familles si l'on pose le problème avec les conditions 1, 2, 3 bis, 4 et que l'on ne considère que les domaines plans.

Retenons seulement que le problème des aires n'est possible dans le plan que pour certaines familles de domaines, dans l'espace il ne sera donc aussi possible que pour certaines familles de surfaces.

58. Nous dirons qu'une surface S, correspondant au domaine D du plan (u, v), est fermée si à tous les points de la frontière de D correspond le même point pour S.

Nous dirons qu'un arc de courbe $\alpha\beta$ est intérieur à une surface fermée S s'il est impossible de tracer une courbe rencontrant $\alpha\beta$, ayant une branche infinie et ne rencontrant par S.

Nous dirons qu'un arc $\alpha\beta$ est *quarrable* s'il est possible de trouver une suite de surfaces polyédrales fermées S_1, S_2,... contenant $\alpha\beta$, dont les aires, sommes des aires des faces, tendent vers zéro et qui ont pour surface limite une surface dont l'ensemble des points est identique à l'ensemble des points de $\alpha\beta$.

Une courbe fermée sera dite quarrable si chacun de ses arcs est quarrable. Nous ne résoudrons le problème des aires que pour les surfaces limitées par des courbes quarrables (*).

Pour donner un exemple étendu de courbes quarrables montrons que toute courbe rectifiable est quarrable. Soit C une courbe rectifiable de longueur l, partageons-la en arcs de longueur a.

Soient $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$... ces arcs. Considérons les cylindres de révolution dont les axes sont les cordes $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$... et dont les rayons sont égaux à a. Nous limiterons le cylindre $\alpha\beta$ aux deux parallèles dont les plans passent par α et β et de même pour les autres cylindres.

Deux cylindres consécutifs, $\alpha\beta$ et $\beta\gamma$ par exemple, seront reliés par l'un, convenablement choisi, des deux fuseaux que les parallèles limites de ces deux cylindres détachent sur la sphère de rayon a et de centre β. Nous terminerons les cylindres extrêmes par des demi-sphères.

(*) Dans une note des Comptes Rendus de Novembre 1899 je me suis occupé de la définition de l'aire d'une classe particulière de surfaces, les surfaces rectifiables. J'ai pu alors adopter une autre définition des courbes quarrables.

L'ensemble de ces surfaces est une surface fermée contenant C. La somme des aires de ces cylindres et sphères, le mot aire ayant le sens qu'on lui attribue en géométrie élémentaire, est au plus égale à

$$\frac{l}{a} 4 \pi a^2 + 2 \pi a \Sigma \operatorname{long} \alpha \beta \leqq 4 \pi a l + 2 \pi a l.$$

En remplaçant les cylindres par des prismes inscrits et les sphères par des polyèdres convexes inscrits on a une surface polyédrale fermée contenant C et d'aire au plus égale à $6 \pi a l$; quand a diminue ces surfaces tendent vers C qui est quarrable.

Nous verrons plus loin que toute courbe quarrable dans le plan est quarrable dans l'espace.

59. Soit une courbe fermée C, *nous appellerons aire minima de C la plus petite limite des aires des surfaces polyédrales dont les frontières tendent vers C.*

Soient trois courbes fermées formées des arcs (α, β) pour la première, (β, γ) pour la seconde, (α, γ) pour la troisième. Supposons β quarrable; on peut l'enfermer dans des surfaces polyédrales fermées B_1, $B_2 \ldots$ dont les aires tendent vers zéro et dont les points tendent vers ceux de β. Soient A_1, $A_2 \ldots$ des surfaces polyédrales dont les frontières tendent vers (α, β) et dont les aires tendent vers l'aire minima de (α, β). Soient de même les surfaces C_1, $C_2 \ldots$ relatives à (β, γ).

Si i est assez grand et j assez petit, A_i et C_i rencontrent B_j suivant des courbes.

Supposons A_i définie à l'aide de fonctions des variables u, v; le point (u, v) étant dans un certain domaine D indépendant de i; soit b la partie de frontière de D qui correspond à β. Les points de A_i intérieurs à B_j correspondent à un certain ensemble de points du plan (u, v) lequel contient un domaine dont la frontière comprend b. Supposons ce domaine d_{ij} pris le plus grand possible et soit b_{ij} la partie de sa frontière qui ne fait pas partie de celle de D.

La courbe β_{ij} de A_i qui correspond à b_{ij} est sur B_j; si i et j augmentent simultanément β_{ij} tend vers β (*).

Nous définirons de même la courbe β'_{ij} relative à B_j, C_i. Sur B_j on

(*) Pour ne pas être entraîné à de trop longs développements, nous admettons ces propriétés.

peut joindre les extrémités de β_{ij} et β'_{ij} qui tendent vers l'extrémité m de β par une ligne polygonale m_{ij} dont tous les points tendent vers m, de même soit n_{ij} une courbe de B_j joignant les extrémités de β_{ij} et β'_{ij} qui tendent vers l'extrémité n de β.

Soient A'_{ij} la portion de A_i correspondant à $D - d_{ij}$ et C'_{ij} la portion analogue de C_i. La surface formée de A'_{ij}, C'_{ij} et de l'une des deux surfaces limitées sur B_j par β_{ij}, β'_{ij}, m_{ij}, n_{ij} a sa frontière qui tend vers (α, γ) et l'une de ses courbes qui tend vers β. Son aire tend vers une quantité au plus égale à la somme des aires minima de (α, β) et (β, γ); il est d'ailleurs évident que la limite ne peut être inférieure à cette somme, donc elle lui est égale.

C'est cette propriété qui nous servira dans la suite. Remarquons qu'elle suffit pour prouver que toute courbe plane non quarrable dans le plan n'est pas quarrable dans l'espace.

60. Considérons une courbe rectifiable fermée C de longueur l et soit une suite de polygones inscrits P_1, $P_2 \ldots$ que l'on obtient en divisant C en arcs égaux de longueurs a_1, $a_2 \ldots$ tendant vers zéro. Soit A l'un des sommets de P_i, la surface que nous avons attachée, au § 58, à la courbe C considérée comme ouverte et d'extrémités A, A et à P_i, moins les deux demi-sphères qui la terminent, constitue ce que nous appellerons une surface annulaire. En remplaçant les cylindres et fuseaux qui la composent par des polyèdres nous avons une surface annulaire polyédrale S_i.

Considérons sur S_i un contour fermé formé, sur les prismes, de parallèles aux arêtes des prismes, sur les polyèdres qui remplacent les fuseaux, de lignes polygonales inscrites dans des grands cercles de ces fuseaux, soit Γ_i; la longueur de Γ_i est évidemment inférieure à

$$l + 2\pi a_i \frac{l}{a_i} = (2\pi + 1)\, l.$$

Considérons l'ensemble E des polygones comprenant: 1.° les trapèzes dont les bases sont les axes des cylindres et les parallèles aux génératrices faisant partie de Γ_i; 2.° les triangles que l'on obtient en joignant chaque sommet m de P_i aux sommets de Γ_i situés sur la sphère de rayon a_i et de centre m. La somme des aires de ces polygones est au plus

$$\frac{(2\pi + 1)\, l + l}{2}\, a_i = (\pi + 1)\, a_i\, l.$$

Ceci posé, nous avons vu au paragraphe précédent que l'on peut considérer l'aire minima de C comme la limite la plus petite des aires de surfaces polyédrales A_i dont les frontières C_i, portées par les surfaces S_i, tendent vers C.

Considérons la surface formée de l'ensemble E, de l'un des ensembles de polygones de S_i dont les frontières sont les côtés de C_i et de Γ_i, et de la surface A_i (*); son aire diffère de celle de A_i de moins de $(\pi + 1)\, a_i\, l$ augmentée de la somme des aires des polygones qui forment S_i. Donc l'aire minima de C est la limite des aires minima des contours P_i, et l'aire minima de P_i est la limite inférieure des aires des surfaces polyédrales dont P_i est la frontière. On sait donc trouver l'aire minima de P_i par une suite dénombrable d'opérations, donc l'aire minima de C peut être obtenue à l'aide d'une infinité dénombrable d'opérations. Mais il faut bien remarquer que ce n'est pas une suite dénombrable d'opérations; en d'autres termes l'aire minima d'une courbe rectifiable n'est pas définie à la façon de la somme d'une série mais à la façon de la somme d'une série dont les termes sont des séries.

Les polygones P_i sont des polygones particuliers inscrits dans C, on peut remplacer cette suite de polygones par une suite quelconque de polygones inscrits dans C et tendant vers C. En effet, soient deux polygones P et Q de longueurs inférieures à l qui se correspondent point par point, les points homologues étant distants de moins de ε; en raisonnant sur P et Q comme sur Γ_i et P_i, on voit que les aires minima de P et Q diffèrent de moins de $l\,\varepsilon$.

61. La plus petite limite des aires des surfaces polyédrales qui tendent vers une surface donnée S est ce que nous appellerons l'*aire intérieure* de S.

D'après la condition 4 du problème des aires ce nombre doit être l'aire de S. Avant de rechercher s'il vérifie la condition 3 de ce problème, nous allons étudier les surfaces dont l'aire intérieure est finie. Ces surfaces sont les *surfaces quarrables*, elles correspondent aux courbes rectifiables.

Soit a l'aire intérieure de S. Supposons que l'ensemble des projections des points de S sur le plan des $x\,y$ contienne un domaine. Soit un rectangle $A\,B\,C\,D$ de côtés parallèles à $o\,x$ et $o\,y$ et contenu dans ce domaine.

Soit une série de surfaces polyédrales S_1, $S_2 \ldots$ qui tendent vers S et dont les aires a_1, $a_2 \ldots$ tendent vers a. L'ensemble des projections des points de S_i sur le plan des $x\,y$ contient un rectangle $A_i\,B_i\,C_i\,D_i$ de côtés paral-

(*) Nous admettons ici que tous ces polygones forment bien une surface.

lèles à ox et oy. On peut supposer que A_i, B_i, C_i, D_i tendent vers A, B, C, D, quand i augmente indéfiniment.

Soit $l_i(y)$ la somme des longueurs des lignes polygonales sections de S_i par $y = y_i$, $l_i(y)$ sera indéterminée si dans le plan d'ordonnée y se trouve une face de S_i, nous ne nous occuperons pas des valeurs de y pour lesquelles cela a lieu. Soit l_i la limite inférieure de $l_i(y)$ quand y varie de y_i ordonnée de $A_i B_i$ à y'_i ordonnée de $D_i C_i$. On a évidemment

$$a_i \geqq l_i(y'_i - y_i).$$

Or a_i tend vers a, $y'_i - y_i$ tend vers la longueur du côté BC, donc la plus grande des limites vers laquelle tend l_i est au plus $\frac{a}{\text{long. } BC}$, quantité finie. D'ailleurs $l_i(y)$ étant continue la valeur l_i est atteinte pour une valeur α_i de y.

La section de S_i par le plan $y = \alpha_i$ se compose d'un nombre fini de lignes polygonales qui décomposent S_i en un nombre fini de morceaux.

Supposons choisis sur S deux points M et N se projetant sur le plan des xy de part et d'autre de la bande comprise entre les droites indéfinies AB et CD, et soient M_i et N_i des points de S_i qui tendent respectivement vers M et N. Les projections de M_i et N_i sont, dès que i est assez grand, de part et d'autre de la bande comprise entre les droites indéfinies $A_i B_i$ et $C_i D_i$; M_i et N_i appartiennent alors à deux morceaux différents de S_i; désignons par L_i l'une des lignes composant la section de S_i par $y = \alpha_i$ et choisie de façon que M_i et N_i soient sur S_i de part et d'autre de L_i. L_i est de longueur au plus égale à l_i.

Nous verrons, §§ 95 et 96, que certaines des L_i ont une courbe limite L dont la longueur au plus égale à $\frac{a}{\text{long. } BC}$.

L est d'ailleurs une courbe plane située dans le plan $y = \alpha$, α étant la limite des nombres α_i correspondant aux courbes L_i considérées. De plus L divise S en deux morceaux, l'un contenant M, l'autre contenant N.

Donc *toute surface quarrable peut être divisée en deux morceaux par une courbe rectifiable*, on peut de plus supposer que cette courbe est dans un plan parallèle à un plan P donné. Mais la démonstration précédente suppose qu'il existe un plan perpendiculaire à P sur lequel l'ensemble des projections des points de S contient un domaine. Les seules surfaces pour lesquelles cela n'a pas lieu sont celles qui sont sommes de surfaces portées par

des plans parallèles à P et de surfaces dont l'ensemble des points est aussi l'ensemble des points d'une courbe dont la projection ne remplit aucun domaine. Des raisonnements longs mais simples, analogues à ceux que nous venons d'employer, permettent de montrer que le théorème précédent s'applique aussi à ces surfaces, donc *toute surface quarrable peut être décomposée à l'aide de courbes rectifiables en un nombre fini de surfaces dont les aires intérieures sont aussi petites que l'on veut.*

62. Considérons une surface quarrable S et soit une suite de divisions de S en un nombre fini de surfaces à l'aide de courbes quarrables. De telles divisions existent toujours d'après ce qui précède; de plus on peut supposer que, dans la $i^{ème}$ division D_i, le maximum de la distance de deux points d'un même morceau soit ε_i, ε_i tendant vers zéro avec $\frac{1}{i}$. Soient A, B, C... les n morceaux qui proviennent de la division D_i; a, b, c... les contours de ces morceaux. Soient α, β, γ... des surfaces polyédrales dont les aires diffèrent de moins de $\frac{\varepsilon}{n}$ des aires minima de a, b, c... et dont les frontières diffèrent de moins de ε_i de ces frontières. On peut enfermer A dans un cube de côté ε_i et nous pouvons supposer que α est tout entière dans ce cube.

Ceci posé, le raisonnement du § 59 nous montre qu'il est possible de construire une surface polyédrale S_i dont l'aire soit aussi voisine que l'on veut de la somme des aires des α, β, ..., c'est-à-dire dont l'aire soit plus petite que la somme des aires minima des a, b... augmentée de ε ou du moins aussi voisine que l'on veut de cette somme.

Si l'on fait correspondre point à point α et A les points correspondants sont distants au plus de $\varepsilon_i\sqrt{3}$, donc on peut supposer que S_i et S se correspondent point à point, le maximum de la distance de deux points homologues étant aussi voisin que l'on veut de $\varepsilon_i\sqrt{3}$.

Les surfaces S_i ont donc pour limite S et par suite la plus petite limite de leurs aires est au moins égale à l'aire intérieure de S.

Attachons à chaque division D_i le nombre m_i somme des aires minima des contours a, b... L'aire intérieure de S est au plus égale à la plus petite limite des nombres m_i.

Considérons une suite de surfaces polyédrales Σ_p tendant vers S et dont les aires tendent vers l'aire intérieure de S. Traçons sur elles des courbes qui tendent vers a, b, c... On divise ainsi Σ_p en n morceaux qui tendent respectivement vers A, B,... et dont la somme des aires tend vers une li-

mite supérieure à la somme des aires minima de a, b ... Donc, quel que soit i, m_i est inférieur à l'aire intérieure de S.

Donc *quelle que soit la suite de divisions D_i, les nombres m_i correspondants ont une limite: l'aire intérieure de S.*

De cette définition de l'aire intérieure résulte que si l'on divise une surface S en deux surfaces S_1, S_2 par une courbe quarrable, l'aire intérieure de S est la somme des aires intérieures de S_1 et S_2. Donc *si l'on pose le problème des aires avec les conditions 1, 2, 3 bis, 4 il est possible et d'une seule manière pour les surfaces limitées par des courbes quarrables, l'aire d'une surface étant son aire intérieure.*

63. Nous dirons qu'une courbe C tracée sur une surface S est quarrable sur cette surface s'il est possible de l'enfermer dans des morceaux de S dont la somme des aires est aussi petite que l'on veut; le mot aire ayant le sens qui vient d'être indiqué.

Supposons tracée sur S une courbe C fermée qui partage S en deux morceaux. L'un d'eux est intérieur à C. Dans ce morceau nous pouvons tracer des courbes quarrables C_i divisant S en deux morceaux et tendant vers C; C_i limite sur S une surface S_i, il est évident que l'aire de S_i tend vers l'aire intérieure du morceau Σ limité par C. Au contraire si l'on considère des courbes C_i tendant vers C, mais extérieures à Σ, il se peut que les aires des surfaces S_i que limitent les C'_i ne tendent pas vers l'aire intérieure de celle limitée par C. Un raisonnement tout-à-fait identique à celui qu'emploie M.r Jordan pour le cas où S est un plan (Cours d'Analyse, 2e édition § 36) montre que les aires des S_i tendent vers une limite déterminée, *l'aire extérieure de Σ sur S.*

Dans le cas où C est quarrable sur la surface et dans ce cas seulement ces deux aires (intérieure et extérieure) sont égales.

On voit qu'une courbe de S quarrable dans l'espace est quarrable sur S. Ceci revient à dire que si l'on considère sur S une famille de courbes quarrables dans l'espace $C(\lambda)$ variant d'une façon continue avec λ, la courbe $C(\lambda)$ limitant sur S une surface $S(\lambda)$, l'aire de $S(\lambda)$ est une fonction continue de λ.

64. Nous pouvons maintenant démontrer que l'aire d'une surface satisfait à la condition 3 du problème des aires. Soit une surface S divisée par des courbes en morceaux S_1, S_2 ... Nous pouvons remplacer chaque surface S_i par une surface S'_i qui la comprend de façon que la différence des aires entre S'_i et S_i soit inférieure à un nombre choisi arbitrairement ε_i.

Pour démontrer que la somme des aires des S_i, qui n'est pas supérieure à l'aire de S, ne lui est pas inférieure, il suffit donc de démontrer qu'il en est de même de la somme des aires des S'_i. Chaque point de S étant intérieur à l'un des S'_i cela serait évident si les S'_i étaient en nombre fini, à cause de ce qui précède. Or, en reprenant le raisonnement que M.r Borel emploie à la page 42 de ses Leçons sur la théorie des fonctions et qui nous a déjà été utile, on voit qu'il suffit de choisir convenablement un nombre fini de surfaces S'_i pour que tout point de S soit intérieur à l'une d'elles.

Le problème des aires posé avec les conditions 1, 2, 3, 4 est donc possible et d'une seule manière pour les surfaces limitées par des courbes quarrables, l'aire d'une surface étant son aire intérieure.

On verrait aussi que dans la définition de l'aire intérieure à l'aide des divisions D_i du § 62, il est inutile que ces divisions ne fassent intervenir qu'un nombre fini de morceaux.

Remarquons que cette définition de l'aire intérieure d'une surface est analogue à la définition de la longueur d'une courbe comme limite des périmètres des polygones inscrits. Un polygone inscrit définit en effet une division de la courbe à laquelle nous faisons correspondre une division de la surface à l'aide de courbes quarrables. A la longueur d'un côté ab d'un polygone, c'est-à-dire à la limite inférieure des longueurs des courbes qui joignent les deux points de division consécutifs a, b, nous faisons correspondre la limite inférieure des aires des surfaces limitées par C l'un des contours quarrables qui intervient dans la division de la surface.

L'analogie se poursuit plus loin encore, car il est possible de démontrer qu'étant donnée une courbe fermée C il existe une surface limitée à C et ayant pour aire intérieure l'aire minima de C (*). Ces surfaces correspondent aux côtés des polygones inscrits.

65. En géométrie élémentaire on définit les aires des surfaces cylindriques, des surfaces coniques et des surfaces convexes; il nous est facile de légitimer ces définitions.

Soient un cylindre limité à deux sections droites et A, B deux de ses génératrices, elles découpent sur la surface un morceau D. La projection sur le plan de A et B d'une surface polyédrale qui tend vers D couvre un domaine qui tend au moins vers le rectangle limité par A, B; donc l'aire de cette surface polyédrale tend au moins vers l'aire de ce rectangle. De là

(*) Voir chapitre VI.

résulte que l'aire d'un cylindre est au moins celle de tout prisme inscrit. Mais si les faces d'un tel prisme tendent vers zéro le prisme tend vers le cylindre et par suite son aire tend au moins vers celle du cylindre, donc exactement vers cette aire.

La même démonstration s'applique au cône. On voit que les cylindres de directrices planes rectifiables et que les cônes de directrices sphériques rectifiables sont seuls quarrables.

Soit une surface S fermée convexe, c'est-à-dire ne rencontrant aucune droite en plus de deux points; et soient S_1, $S_2 \ldots$ des surfaces polyédrales fermées tendant vers S et dont les aires tendent vers l'aire intérieure de S (*).

Soit O un point intérieur à S. Prenons par rapport à O les homothétiques S'_1, $S'_2 \ldots$ de S_1, $S_2 \ldots$ les rapports étant tels que S'_i n'ait aucun point intérieur à S. Il suffit pour cela que le rapport relatif à S_i soit $\frac{R}{R - \varepsilon_i}$, si deux points correspondants de S et S'_i sont distants d'au plus ε_i et si R est le minimum de la distance de O aux points de S, et puisque ε_i tend vers zéro avec $\frac{1}{i}$ l'aire de S est la limite des aires des S'_i.

Ceci posé considérons un polyèdre convexe P inscrit dans S; tous les points de P étant intérieurs à S et par suite à S'_i l'aire de P est inférieure à celle de S'_i, c'est-à-dire au plus égale à celle de S. Si donc nous considérons une suite de polyèdres convexes inscrits dans S et tendant vers S on voit, d'une part que la plus petite limite des aires de ces polyèdres n'est pas inférieure à l'aire de S, d'autre part que la plus grande limite ne lui est pas supérieure, c'est-à-dire que *l'aire de S est la limite des aires des polyèdres convexes inscrits tendant vers S.*

Si l'on ne considère qu'un morceau de S limité par une courbe quarrable le même résultat est vrai, comme il résulte de la démonstration précédente. Remarquons d'ailleurs que toute section plane de S étant convexe est rectifiable et par suite quarrable.

(*) Puisque nous avons défini une surface fermée comme ayant tous ses points frontières confondus en un point A, nous pouvons seulement affirmer que les frontières des S_i, tendent vers A, et non pas que les S_i sont fermées. Mais en coupant S_i par une sphère Σ_i de centre A, ce qui détermine autour de la frontière de S_i une courbe C_i et en fermant la portion de S_i extérieure à Σ_i par l'une des portions limitées par C_i sur Σ_i, on remplace S_i par une surface fermée, laquelle est polyédrale si l'on emploie à la place de Σ_i un polyèdre convenable inscrit dans Σ_i.

On voit aussi que si une surface convexe S enveloppe une surface convexe S' l'aire de S est supérieure à celle de S'; de là résulte que l'aire de S' est finie si celle de S est finie et comme on peut prendre pour S un cube, toute surface convexe est quarrable. De plus son aire peut être définie comme la limite supérieure de celles des polyèdres convexes inscrits.

Les exemples de ce paragraphe montrent que l'on pourrait en géométrie élémentaire définir d'une manière générale l'aire d'une surface S comme la plus petite limite des aires des surfaces qui tendent vers S.

66. Pour les surfaces simples que nous venons d'examiner l'aire se calcule par une suite dénombrable d'opérations. Dans le cas général, pour calculer l'aire de la surface par les procédés précédemment indiqués, il faut d'abord diviser la surface en morceaux aussi petits que l'on veut par des courbes quarrables. Nous savons obtenir une telle division si la surface est donnée comme limite de surfaces polyédrales dont les aires n'augmentent pas indéfiniment.

Supposons la surface S donnée par:

$$x = f(u, v), \quad y = \varphi(u, v), \quad z = \psi(u, v);$$

u, v décrivant un domaine D. Coupons cette surface par $x = \lambda$, ce qui donne sur S un nombre fini ou infini de courbes. Soient sur S deux points M, N que nous supposons de part et d'autre de $x = \lambda$; nous appellerons $C(\lambda)$ l'une des courbes sections de S par $x = \lambda$, qui sépare S en deux morceaux, l'un contenant M, l'autre N. A $C(\lambda)$ correspond dans le plan (u, v) $\gamma(\lambda)$. Soit D_1 une partie de D balayée par $\gamma(\lambda)$.

Inscrivons dans $\gamma(\lambda)$ un polygone de côtés égaux à l_1 et soient $P(\lambda, l_1)$ le polygone correspondant inscrit dans $C(\lambda)$ et $l(\lambda, l_1)$ sa longueur. $l(\lambda, l_1)$ est une fonction continue de λ, on peut donc la définir par une infinité dénombrable de valeurs, celles qui correspondent aux valeurs rationnelles de λ; et par suite trouver son minimum $m(l_1)$ et la valeur λ_1 pour laquelle il est atteint.

Soient l_1, l_2,... tendant vers zéro, les valeurs λ_1, λ_2,... correspondantes ont une valeur limite λ_0; $C(\lambda_0)$ a pour longueur la limite de $m(l_1)$, $m(l_2)$... et c'est la courbe de plus petite longueur parmi les $C(\lambda)$. Donc si $m(l_1)$, $m(l_2)$... augmentent indéfiniment S n'est pas quarrable; sinon on sait diviser S en deux morceaux par une courbe quarrable.

On peut donc par une infinité dénombrable d'opérations savoir si une surface est quarrable et, si elle l'est, trouver son aire.

67. Démontrons que toute courbe quarrable sur une surface $z = f(x, y)$ est quarrable dans l'espace. Soit Γ une courbe quarrable sur la surface considérée S; enfermons-la dans un morceau D de S limité par une courbe rectifiable C, soit l la longueur de C. Faisons subir à D les translations $\frac{\varepsilon}{l}$, parallèles d'une part à oz, d'autre part à zo. Les nouvelles positions de D et l'ensemble des positions occupées par C constitue une surface fermée dont l'aire est deux fois celle de D augmentée de ε. Cette aire peut donc être rendue aussi petite qu'on le veut; et puisqu'une surface fermée peut être remplacée par une surface polyédrale voisine, l'aire étant changée aussi peu qu'on le veut, Γ est quarrable dans l'espace.

Cette propriété s'applique en particulier au plan, ainsi que nous l'avions annoncé; mais elle n'est pas générale, c'est-à-dire qu'une courbe non quarrable dans l'espace peut être quarrable sur une surface.

Considérons en effet une courbe plane fermée non quarrable C et une circonférence Γ intérieure à C. C n'est pas quarrable dans l'espace et cependant C est quarrable sur la surface quarrable formée d'une part de la surface limitée par C sur le plan, d'autre part de la couronne limitée sur le plan par C et Γ.

68. Nous considérons les surfaces:

$$x = f(u, v), \quad y = \varphi(u, v), \quad z = \psi(u, v)$$

ayant en tout point un plan tangent et telles que f, φ, ψ aient des dérivées partielles du premier ordre continues.

Isolons sur la surface un morceau qui, par rapport à des axes convenables, ait pour équation $z = f(x, y)$, le plan tangent n'étant jamais parallèle à oz.

Soit D le domaine projection sur oxy du morceau considéré Σ; soit M le maximum de la valeur absolue des dérivées du premier ordre. Divisons D en carrés de côtés parallèles à ox et oy; supposons tous ces carrés de côté a et soit n le nombre de ceux de ces carrés qui sont intérieurs à D (nous négligerons ceux qui ne sont pas intérieurs à D).

Soient $\alpha\beta\gamma\delta$ l'un de ces carrés, C la courbe qui lui correspond sur Σ, $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ le parallélogramme qui se projette sur $\alpha\beta\gamma\delta$ et qui est dans le plan tangent en un point ξ, η, ζ du morceau de Σ limité par C.

La différence entre l'aire de ce parallélogramme et l'aire minima de C est au plus l'aire de la partie du prisme projetant C limitée par cette courbe

et $\alpha' \beta' \gamma' \delta'$. Si nous désignons par ε le maximum de la variation des dérivées partielles dans l'un quelconque des n carrés, cette aire est au plus $2 a^2 \varepsilon . 4$.

L'aire de $\alpha' \beta' \gamma' \delta'$ est

$$\sqrt{\overline{f'_x(\xi, \eta)}^2 + \overline{f'_y(\xi, \eta)}^2 + 1} \,.\, a^2.$$

L'aire intérieure de Σ, ou plutôt de la partie de Σ qui se projette à l'intérieur des carrés considérés, est égale à

$$A = a^2 \sum \sqrt{f'^2_\xi + f'^2_\eta + 1}$$

à moins de $8 a^2 n \varepsilon$ près. Or A tend, quand a tend vers zéro, vers l'intégrale

$$\iint \sqrt{f'^2_x + f'^2_y + 1}\, d\,x\, d\,y$$

étendue au domaine D; $a^2 n$ est inférieur à l'aire de D, ε tend vers zéro avec a, donc l'aire est donnée par l'intégrale

$$\iint \sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y}\, d\,x\, d\,y.$$

Il suffit d'un changement de variables pour retomber sur la formule connue:

$$A = \iint \sqrt{\overline{D\frac{(f, \varphi)}{(u, v)}}^2 + \overline{D\frac{(\varphi, \psi)}{(u, v)}}^2 + \overline{D\frac{(\psi, f)}{(u, v)}}^2}\, d\,u\, d\,v.$$

Nous avons en même temps retrouvé la définition qu'emploie M.[r] Hermite.

69. Il serait intéressant de savoir si, dans tous les cas où l'intégrale précédente existe, elle représente l'aire et dans quels cas cette intégrale existe.

Les méthodes du § 50 avec lesquelles nous avons fait dans le cas des courbes l'étude analogue, permettraient peut-être, bien que des difficultés nouvelles se présentent, d'examiner le cas où il existe en tout point un plan tangent. Mais il faudrait encore étudier le cas où les dérivées partielles de x, y, z existent sans que le plan tangent existe.

J'indiquerai seulement le résultat suivant dont la démonstration est fort simple. Si les dérivées de x, y, z, considérées comme fonctions de u ou de v, sont toutes inférieures en valeur absolue à un nombre M l'intégrale précédente donne une limite supérieure de l'aire.

70. Dans le chapitre III nous avons appris à former des fonctions qui définissent la courbe rectifiable la plus générale; nous ne résoudrons pas le problème analogue relatif aux surfaces quarrables (*), nous allons montrer seulement que l'on peut définir une famille intéressante et fort étendue de surfaces quarrables qui jouit de propriétés analogues à celles de la famille des courbes rectifiables: c'est la famille des *surfaces rectifiables.*

Nous dirons qu'une surface S

$$x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v), \qquad z = \psi(u, v),$$

définie pour un certain domaine D du plan (u, v), est rectifiable si, à toute courbe rectifiable de D correspond une courbe rectifiable de S.

Signalons d'abord une différence entre les courbes et les surfaces rectifiables. Dire qu'une courbe est rectifiable c'est donner une propriété de l'ensemble de ses points; dire qu'une surface est rectifiable c'est donner une propriété de l'ensemble de ses points et une propriété de la représentation particulière qui définit la surface. En d'autres termes, une surface rectifiable peut cesser de l'être si l'on change de représentation paramétrique. Par exemple, la demi-sphère

$$x = u, \qquad y = v, \qquad z = \sqrt{R^2 - u^2 - v^2}$$

n'est pas rectifiable, et la demi-sphère

$$x = R \sin\theta \cos\varphi, \qquad y = R \sin\theta \sin\varphi, \qquad z = R \cos\theta$$

l'est.

Il est d'abord évident que pour qu'une surface soit rectifiable il faut et il suffit que ses projections le soient; qu'il s'agisse de projections sur des plans ou sur des droites. Nous pouvons donc raisonner sur la surface

$$x = f(u, v), \qquad y = 0, \qquad z = 0.$$

Soient a, b deux points du plan (u, v), A et B les points de la surface qui leur correspondent. Nous allons démontrer que le rapport

$$\frac{\text{distance } AB}{\text{distance } ab} = r(a, b)$$

(*) Cependant, une surface quarrable étant limite de surfaces dont les aires n'augmentent pas indéfiniment, il est facile d'indiquer un procédé régulier permettant d'obtenir toute surface quarrable par une suite dénombrable d'opérations. Mais un tel procédé n'est pas comparable pour la simplicité à celui qui fournit les courbes rectifiables.

est limité. En effet, s'il ne l'était pas, on pourrait trouver une suite a_1, b_1; a_2, b_2;... telle que les rapports correspondants augmentent indéfiniment; on pourrait même supposer que les points a_i d'une part, b_i d'autre part ont des points limites a et b. a et b sont confondus, sans quoi $r(a, b)$ serait infini, ce qui est impossible. Choisissons une série convergente à termes positifs décroissants, soit

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots$$

Soient a_{α_i}, b_{β_i} deux points dont les distances à a sont inférieures à ε_i et tels que $r(a_{\alpha_i}, b_{\beta_i})$ est supérieur à $\frac{1}{\varepsilon_i}$. Considérons la courbe obtenue en allant de a à a_{α_1} en ligne droite, de a_{α_1} à b_{β_1} de b_{β_1} à a_{α_1} et ainsi de suite assez de fois pour que le chemin parcouru sur $a_{\alpha_1} b_{\beta_1}$ soit compris entre ε_1 et $2\,\varepsilon_1$, on arrivera ainsi soit en α_1 soit en β_1; on parcourt la droite qui joint ce point à a, puis on va de a à a_{α_2} et l'on parcourt sur $a_{\alpha_2} b_{\beta_2}$ une longueur comprise entre ε_2 et $2\,\varepsilon_2$ et l'on va de a_{α_2} ou b_{β_2} à a et ainsi de suite. La courbe du plan (u, v) ainsi parcourue est de longueur au plus

$$4\,(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots).$$

La courbe de la surface ainsi parcourue est de longueur au moins

$$\varepsilon_1 \cdot \frac{1}{\varepsilon_1} + \varepsilon_2 \cdot \frac{1}{\varepsilon_2} + \cdots$$

donc de longueur infinie, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Ainsi $r(a, b)$ est limité, cette condition est évidemment suffisante; on peut l'exprimer ainsi: *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface soit donnée sous forme rectifiable est que $f(u, v)$, $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ considérées comme fonctions de la seule variable u ou de la seule variable v aient des nombres dérivés bornés.*

Occupons-nous de la surface projection sur ox. Les courbes

$$u = f_1(t) \qquad v = \varphi_1(t),$$

f_1 et φ_1 étant croissantes, qui joignent u_0, v_0 à u, v ont une longueur au plus égale à

$$u - u_0 + v - v_0$$

(nous supposons que u_0, v_0 sont les plus petites valeurs de u et v et que u_0, v_0 définit un point de la surface; il est facile de se débarrasser de cette hypothèse); les courbes correspondantes de la surface ont donc des longueurs

au plus égales à

$$M\sqrt{2}\,(u + v - u_0 - v_0)$$

si les nombres dérivés de f sont inférieurs à M.

Soit $V(u, v)$ le maximum de ces longueurs, c'est une fonction croissante de u et de v dont les nombres dérivés sont inférieurs à M.

D'ailleurs si

$$u_1 > u_2, \qquad v_1 > v_2,$$

on a:

$$V(u_1, v_1) - V(u_2, v_2) \geqq |f(u_1, v_1) - f(u_2, v_2)|,$$

donc

$$n(u, v) = \frac{1}{2}\Big[V(u, v) - f(u, v)\Big]$$

$$p(u, v) = \frac{1}{2}\Big[V(u, v) + f(u, v)\Big]$$

sont des fonctions croissantes de u et v et $f(u, v)$ *est la différence de deux fonctions croissantes dont les nombres dérivés sont inférieurs à* M.

Si nous avions recherché la condition pour qu'à toute courbe rectifiable $t = \chi(\theta)$ de l'axe des t corresponde sur la courbe

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t)$$

une courbe rectifiable

$$x = f[\chi(\theta)], \qquad y = \varphi[\chi(\theta)], \qquad z = \psi[\chi(\theta)],$$

nous aurions aussi trouvé que f, φ, ψ sont des différences de fonctions croissantes à nombres dérivés bornés.

71. Montrons que les surfaces rectifiables sont quarrables. Divisons le domaine D du plan (u, v) en carrés. Soit a le côté de l'un d'eux, la courbe qui correspond à son périmètre a une longueur au plus égale à $4\,Ma$. L'aire minima de cette courbe C est au plus l'aire du cône dont le sommet est sur C et dont C est la directrice. Or on obtient cette aire comme limite des aires analogues relatives aux polygones inscrits dans C et tendant vers C; l'aire minima de C est donc au plus égale à celle que limite dans le plan une courbe de longueur $4\,Ma$ c'est-à-dire au plus l'aire $\frac{4\,M^2 a^2}{\pi}$ du cercle de circonférence $4\,Ma$.

L'aire de la surface est donc au plus celle du domaine D multipliée par $\frac{4 M^2}{\pi}$.

Une surface rectifiable est donc quarrable et le rapport de l'aire d'un morceau de surface à l'aire de la partie correspondante du plan (u, v) *est borné.*

72. L'ensemble des surfaces rectifiables est fort étendu; il comprend par exemple toutes les surfaces analytiques, tous les cylindres et cônes développables (*), toutes les surfaces convexes, à condition de choisir convenablement la représentation paramétrique. Mais il existe des surfaces quarrables qui ne sont pas rectifiables, quelle que soit la représentation paramétrique choisie.

Considérons en effet dans le plan des $z x$ une courbe $z = f(x)$, passant par l'origine, définie pour $0 < x < 1$ et telle que, s étant l'arc, on ait:

$$\frac{d s}{d x} = \frac{1}{x} .$$

Cette courbe n'est pas rectifiable, mais tout arc de cette courbe ne comprenant pas l'origine l'est; c'est-à-dire que le cylindre $z = f(x)$ n'est pas quarrable mais que tout morceau ne rencontrant pas l'axe des y l'est.

Considérons la partie de cylindre qui est située entre les plans $x = 0$, $x = y$; elle est quarrable et d'aire:

$$\int_0^1 x \, d s = \int_0^1 d x = 1$$

La surface comprenant ce morceau de cylindre et symétrique par rapport aux plans $x = 0$, $y = 0$, $x = y$, $x = - y$ est donc quarrable; mais il ne passe aucune courbe rectifiable de cette surface par l'origine, donc elle ne peut être mise sous forme rectifiable.

(*) Chapitre V.

CHAPITRE V.

Surfaces applicables sur le plan.

73. Nous nous servirons de la propriété suivante :

Si dans tout intervalle les fonctions (f, f_1); (φ, φ_1); (ψ, ψ_1) ont les mêmes variations totales finies les deux courbes (f, φ, ψ) et (f_1, φ_1, ψ_1) ont la même longueur.

En effet, soit une division de l'intervalle de variation de t

$$t_0, \; t_1, \ldots t_n.$$

La longueur de la première courbe a pour valeur approchée

$$\Sigma \sqrt{\overline{f(t_{i+1}) - f(t_i)}^2 + \overline{\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)}^2 + \overline{\psi(t_{i+1}) - \psi(t_i)}^2}.$$

Soit $v[f(t)]$ la variation totale de f entre t_0 et t.

La somme précédente diffère de

$$\Sigma \sqrt{\overline{v[f(t_{i+1})] - v[f(t_i)]}^2 + \overline{v[\varphi(t_{i+1})] - v[\varphi(t_i)]}^2 + \overline{v[\psi(t_{i+1})] - v[\psi(t_i)]}^2}$$

de moins de

$$\Sigma S_{f,\varphi,\psi} \{ v[f(t_{i+1})] - v[f(t_i)] \} - |f(t_{i+1}) - f(t_i)| = S v[f(t_n)] - \Sigma |f(t_{i+1}) - f(t_i)|.$$

Donc la longueur peut être définie comme la limite de

$$\Sigma \sqrt{\overline{v[f(t_{i+1})] - v[f(t_i)]}^2 + \overline{v[\varphi(t_{i+1})] - v[\varphi(t_i)]}^2 + \overline{v[\psi(t_{i+1})] - v[\psi(t_i)]}^2}$$

et cette somme est la même pour les deux courbes.

74. Considérons une courbe rectifiable quelconque C, $x = f(t)$, portée par l'axe des x, effectuons la transformation ponctuelle $X = \varphi(x)$, φ étant continue. A la courbe C correspond la courbe Γ, $X = \varphi[f(t)]$. Proposons-nous de rechercher quelle doit être la fonction $\varphi(x)$ pour que C et Γ aient toujours la même longueur.

Si la fonction $f(t)$ se réduit à t, Γ a pour équation $X = \varphi(t)$, ce qui montre que $\varphi(x)$ doit avoir entre t_0 et t_1 une variation totale égale à $t_1 - t_0$.

Supposons cette condition remplie et prenons pour C une courbe rectifiable quelconque. Inscrivons dans cette courbe un polygone, soit ε la longueur maximum des côtés de ce polygone. Si les sommets de ce polygone correspondent aux nombres t_i, sa longueur est:

$$l(C) = \Sigma \,|\, f(t_{i+1}) - f(t_i) \,|$$

et celle du polygone correspondant de Γ

$$l(\Gamma) = \Sigma \,|\, \varphi\,[f(t_{i+1})] - \varphi\,[f(t_i)] \,|\,.$$

Or quand ε tend vers zéro la plus petite des limites de cette somme est égale à la variation totale de φ entre $f(t_0)$ et $f(t_n)$ c'est-à-dire à $|\, f(t_n) - f(t_0) \,|$. La longueur de Γ est donc supérieure à la corde qui joint les extrémités de C.

Divisons C en arcs partiels, le même raisonnement montre que la longueur de Γ est supérieure à celle du polygone formé par les cordes des arcs partiels considérés. Donc la longueur de Γ n'est pas inférieure à celle de C.

D'ailleurs la longueur de Γ est la limite de la somme $l(\Gamma)$ et d'après ce que nous avons supposé on a:

$$|\, \varphi\,[f(t_{i+1})] - \varphi\,[f(t_i)] \,| \leqq |\, f(t_{i+1}) - f(t_i) \,|$$

c'est-à-dire que $l(\Gamma)$ est inférieure à $l(C)$.

Donc C et Γ ont la même longueur.

Pour trouver toutes les transformations ponctuelles de l'axe des x qui ne changent pas les longueurs des courbes portées par cet axe, il suffit donc de trouver toutes les fonctions $\varphi(x)$ dont la variation totale dans un intervalle quelconque est égale à la variation de x dans cet intervalle. Pour cela, prenons une fonction continue à variation limitée $f(t)$, c'est-à-dire la différence de deux fonctions continues croissantes. Soit $v(t)$ la fonction qui représente la variation totale de f entre t_0 et t, affectée du signe $+$ ou $-$ suivant que t est supérieur ou inférieur à t_0. L'équation $x = v(t)$ peut être résolue par rapport à t puisque $v(t)$ est une fonction croissante, soit $t = \psi(x)$. La fonction $f[\psi(x)]$ est la plus générale répondant à la question.

75. Soient trois fonctions F, Φ, Ψ, dont les variations totales sont dans tout intervalle égales à la longueur de l'intervalle.

La transformation ponctuelle

$$X = F(x), \qquad Y = \Phi(y), \qquad Z = \Psi(z)$$

fait correspondre à toute courbe C une courbe Γ de même longueur. En

effet, si C est définie par $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$, Γ est définie par $F[f(t)]$, $\Phi[\varphi(t)]$, $\Psi[\psi(t)]$; et les deux fonctions telles, que $f(t)$, $F[f(t)]$, ont, dans tout intervalle, la même variation totale et il en est de même pour $\varphi(t)$, $\Phi[\varphi(t)]$; $\psi(t)$, $\Psi[\psi(t)]$.

La transformation dont il s'agit fait correspondre à chaque point de l'espace (x, y, z) un seul point de l'espace (X, Y, Z). Mais à un point de cet espace peut correspondre un ensemble de points de (x, y, z) ayant la puissance du continu. Si la transformation était biunivoque, ce serait une symétrie plus un déplacement ou un déplacement.

Remarquons encore qu'à toute courbe de l'espace (x, y, z) correspond une courbe de l'espace (X, Y, Z) mais que la réciproque n'est pas vraie.

76. Soit une surface S, appliquons lui la transformation ponctuelle du paragraphe précédent; on trouve une surface Σ. A toute courbe tracée sur S correspond une ligne de même longueur tracée sur Σ; à toute courbe de Σ correspond une courbe de S car, se donner une courbe sur S ou sur Σ, c'est se donner une courbe dans le domaine plan (u, v) qui sert à définir S.

Entre les points de S et de Σ on peut établir une correspondance biunivoque telle qu'à toute courbe rectifiable tracée sur l'une des surfaces corresponde sur l'autre une courbe de même longueur.

Deux surfaces qui jouissent de cette propriété sont dites *applicables l'une sur l'autre*. Cette définition n'est intéressante que si par tout point des surfaces considérées passent plusieurs courbes rectifiables. Elle aurait peu d'intérêt s'il s'agissait de cylindres à section droite non rectifiable, car sur de tels cylindres les génératrices sont les seules courbes rectifiables.

La définition précédente n'aurait plus aucun sens s'il s'agissait de surfaces de la forme

$$z = f(x) + \varphi(y)$$

f et φ étant à variation non bornée, de telles surfaces ne contenant en général aucun arc de courbe rectifiable.

77. Il est, au contraire, très intéressant de savoir si deux surfaces analytiques sont applicables l'une sur l'autre. On sait que, pour une surface analytique

$$x = f(u, v), \quad y = \varphi(u, v), \quad z = \psi(u, v),$$

la longueur d'un arc correspondant à des fonctions u, v ayant des dérivées

continues, a pour différentielle

$$ds^2 = S\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 \cdot du^2 + 2\, S\left(\frac{\partial f}{\partial u}\,\frac{\partial f}{\partial v}\right) \cdot du\, dv + S\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 \cdot dv^2$$
$$= E\, du^2 + 2\, F\, du\, dv + G\, dv^2.$$

Pour que deux surfaces analytiques soient applicables l'une sur l'autre, les points (u, v) des deux surfaces se correspondant, il faut que pour les deux surfaces les quantités E, F, G soient les mêmes.

Montrons que ces conditions sont suffisantes; cela est évident pour les courbes analytiques et pour celles qui sont composées d'un nombre fini d'arcs analytiques.

Soit maintenant un arc rectifiable quelconque sur une surface analytique S. Considérons un ligne polygonale P inscrite dans cette courbe. Aux sommets de P correspondent dans le plan (u, v) des points que nous considérons comme les sommets d'un polygone π du plan des (u, v); soit Π la courbe de S qui correspond à π. Nous allons démontrer que, lorsque les côtés de P sont assez petits, la différence des longueurs entre P et Π est aussi petite qu'on le veut.

Soit AB un côté de P, ab le côté correspondant de π. Evaluons le rapport long. AB: long. ab. Si les coordonnées de a et b sont (u, v); $(u + t\cos\theta, v + t\sin\theta)$ ce rapport est:

$$\left(\frac{AB}{ab}\right)^2 = r^2(u, v, \theta, t) = \frac{1}{t^2}\, S\,[f(u + t\cos\theta, v + t\sin\theta) - f(u, v)]^2.$$

Cette fonction n'est définie que pour $t \neq 0$, nous poserons

$$r^2(u, v, \theta, 0) = E\cos^2\theta + 2\, F\sin\theta\cos\theta + G\sin^2\theta.$$

La fonction r^2 ainsi définie est continue par rapport à l'ensemble u, v, θ, 0. Cela est évident si $t \neq 0$; montrons qu'il en est encore ainsi pour le point u_0, v_0, θ_0, 0. Si cela n'était pas il serait possible de trouver une suite de valeurs u_i, v_i, θ_i, t_i tendant vers u_0, v_0, θ_0, 0 les valeurs correspondantes $r^2(u_i, v_i, \theta_i, t_i)$ ne tendant pas vers $r^2(u_0, v_0, \theta_0, 0)$. Dans une telle suite aussi loin que l'on aille, on trouvera des valeurs de t_i différentes de zéro, car $r(u, v, \theta, 0)$ est continue par rapport à l'ensemble u, v, θ. On peut donc supprimer tous les groupes u_i, v_i, θ_i, t_i pour lesquels t_i est nul, ou, ce qui revient au même, supposer tous les t_i différents de zéro. Nous avons à cher-

cher la limite de

$$\frac{1}{t_i^2} S\,[f(u_i + t_i \cos\theta_i,\ v_i + t_i \sin\theta_i) - f(u_i,\ v_i)]^2.$$

Ceci s'écrit

$$S\,[f'_u(u_i + \eta'_i t_i \cos\theta_i,\ v_i + \eta'_i t_i \sin\theta_i)\cos\theta_i +$$
$$+ f'_v(u_i + \eta'_i t_i \cos\theta_i,\ v_i + \eta'_i t_i \sin\theta_i)\sin\theta_i]^2.$$

Les nombres η'_i correspondant à f, η''_i à φ, η'''_i à ψ étant compris entre zéro et un.

Les dérivées premières sont continues par rapport à l'ensemble u, v donc la limite est

$$S\,[f'_u(u_0,\ v_0)\cos\theta_0 + f'_v(u_0,\ v_0)\sin\theta_0]^2 = r^2(u_0,\ v_0,\ \theta_0,\ 0).$$

La fonction $r^2(u,\ v,\ \theta,\ t)$ étant continue, on peut trouver une valeur η telle que, pour

$$|u_1 - u_2| < \eta, \qquad |v_1 - v_2| < \eta, \qquad |t_1 - t_2| < \eta,$$

on ait :

$$|r(u_1,\ v_1,\ \theta,\ t_1) - r(u_2,\ v_2,\ \theta,\ t_2)| < \varepsilon.$$

Supposons tous les côtés de π de longueur inférieure à η et soit $A\alpha B$ l'arc de Π correspondant au côté $a\,b$ de π. Evaluons la longueur de cet arc.

Pour cela inscrivons un polygone Q dans l'arc, un côté $M\,N$ de ce polygone correspond à un segment $m\,n$ porté par le côté $a\,b$ et l'on a, en conservant les notations précédentes

$$\left|\frac{\text{long}\,M\,N}{\text{long}\,m\,n} - r(u,\ v,\ \theta,\ 0)\right| < \varepsilon.$$

Donc

$$|\text{long}\,A\alpha B - \text{long}\,a\,b \,.\, r(u,\ v,\ \theta,\ 0)| < \text{long}\,a\,b \,.\, \varepsilon$$

Mais on a aussi

$$|\text{long}\,A\,B - \text{long}\,a\,b \,.\, r(u,\ v,\ \theta,\ 0)| < \text{long}\,a\,b \,.\, \varepsilon$$

Et par suite

$$\text{long}\,A\alpha B - \text{long}\,A\,B < 2\,\text{long}\,a\,b \,.\, \varepsilon$$

On en déduit:

$$\text{long}\,\Pi - \text{long}\,P < 2\,\text{long}\,\pi \,.\, \varepsilon.$$

La longueur de π tend vers la longueur de la courbe c du plan des (u, v) qui correspond à la courbe considérée C de l'espace. Montrons que c est rectifiable si la surface dont il s'agit n'a pas de point singulier. On sait qu'on appelle ainsi ceux pour lesquels les trois déterminants fonctionnels tels que $\frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)}$ sont nuls. (Il s'agit là soit de points singuliers de la surface, soit de points singuliers de la représentation paramétrique en u, v).

Les dérivées premières de f, φ, ψ ne s'annulent donc pas en même temps et par suite $r^2(u, v, \theta, 0)$ est toujours supérieur à un nombre fixe positif. Si l'on choisit τ assez petit il en est de même, pour $0 < t < \tau$, de $r^2(u, v, \theta, t)$ que nous supposerons supérieur à $M^2 > 0$.

Donc on a:

$$\frac{\text{long}\, a\, b}{\text{long}\, A\, B} < \frac{1}{M}\ (M > 0)$$

et par suite

$$\frac{\text{long}\, c}{\text{long}\, C} < \frac{1}{M}$$

et puisque C est rectifiable c l'est.

La différence $\text{long}\, \Pi - \text{long}\, P$ tend donc vers zéro quand P tend vers C et l'on peut dire que: sur une portion de surface analytique ne contenant aucun point singulier la longueur d'une courbe C est la limite inférieure des longueurs des courbes de la surface dont C est la limite.

Nous avons déjà vu que si deux surfaces analytiques S et Σ ont le même $d\,s^2$, à toute courbe analytique, ou composée d'un nombre fini d'arcs analytiques de l'une correspond une courbe de même longueur sur l'autre. La courbe que nous avons désignée par Π est composée d'un nombre fini d'arcs analytiques, la définition de la longueur que nous venons de trouver prouve donc qu'à toute courbe rectifiable de S correspond une courbe de même longueur sur Σ et inversement.

Nous avons retrouvé le résultat classique pour que deux surfaces analytiques soient applicables l'une sur l'autre, les points de ces deux surfaces correspondant aux mêmes valeurs de u, v étant homologues: il est nécessaire et suffisant qu'elles aient même $d\,s^2$ (*).

(*) On pourrait étendre ce résultat à des cas plus généraux, en ne supposant pas les surfaces analytiques. Mais ce qui précède suffit pour légitimer les applications que l'on fait de la méthode classique.

78. Demandons-nous maintenant si toutes les surfaces applicables sur une surface analytique sont analytiques.

Par exemple toutes les surfaces applicables sur le plan sont-elles analytiques ? — Soit C le cône

$$z^2 = x^2 + y^2.$$

On sait, d'après la théorie classique, qu'il est applicable sur le plan. Effectuons la transformation ponctuelle

$$X = x, \quad Y = y, \quad Z = \Psi(z),$$

Ψ ayant entre z_0 et z_1 une variation totale égale à $|z_0 - z_1|$. A C correspond une surface Γ applicable sur C; Γ est de révolution et n'est ni un cône, ni un cylindre, c'est une surface non analytique. Si en particulier nous prenons pour la fonction Ψ l'une de celles qui ont été définies au chapitre III et qui ont des maxima et des minima dans tout intervalle (*), la surface Γ *est une surface de révolution applicable sur le plan et ne contenant aucun segment de droite* (**).

79. Des exemples analogues à celui qui précède peuvent être obtenus par des procédés différents. Occupons-nous toujours des surfaces applicables sur le plan.

La théorie classique montre que les développables analytiques sont applicables sur le plan. Soit S une telle développable, G l'une de ses génératrices, G partage S en deux morceaux S_1, S_2.

Faisons glisser S_2 le long de G, puis faisons tourner S_2 autour de G. Après cette double opération géométrique on obtient une nouvelle surface Σ qui est applicable sur le plan ou plus exactement dont un morceau comprenant un segment de G, plus ou moins grand suivant la grandeur de la translation de S_2, est applicable sur le plan.

La même opération répétée un nombre infini de fois pour une infinité dénombrable de génératrices formant un ensemble partout dense sur la surface donnera, si les translations et les rotations sont convenablement choisies, une surface réglée applicable sur le plan et ne contenant aucun morceau de développable.

(*) C'est-à-dire que $f(x)$ étant la fonction définie au § 48 nous posons $\Psi'(x) = f(x)$.

(**) D'une façon plus précise la méridienne de Γ ne contient aucun segment de droite, mais de plus Γ ne peut contenir un morceau de surface gauche de révolution donc Γ ne contient pas de droite.

Prenons maintenant une développable analytique S et soit C une courbe analytique tracée sur S. Réalisons la correspondance entre S et le plan, soit c la transformée de C. Soient A un point quelconque de C, P le plan tangent en A à S, Q le plan osculateur en A à C, et soit P' le symétrique de P par rapport à Q.

Les plans P' ainsi définis enveloppent une développable S' dont on peut réaliser l'application sur le plan de façon qu'à C corresponde c. Si C n'est pas géodésique S et S' sont deux surfaces différentes.

c partage le plan en deux régions A_1, A_2; C partage S en deux régions S_1, S_2 correspondant respectivement à A_1 et A_2; de même sur S' nous avons les deux régions S'_1, S'_2.

Soit Σ la surface $S_1 + S'_2$; c'est une surface non développable applicable sur le plan (*).

Pour bien définir Σ, c'est-à-dire pour distinguer entre $S_1 + S'_2$ et $S_2 + S'_1$ nous prenons arbitrairement un point M sur S, ce point M fixera celle des régions que nous désignons par S_1. Dans toutes les opérations ultérieures ce point M restera fixe.

Σ peut être définie comme la surface applicable sur le plan, formée de deux morceaux de développables analytiques dont la frontière commune est la ligne correspondante à c, et qui autour de M est confondue avec S; ce que nous rappellerons par la notation $\Sigma\,(S, c, M)$.

$c_1, c_2, c_3, \ldots c_n$ étant n courbes analytiques planes ne se rencontrant pas, nous désignerons par $\Sigma\,(S, c_1, c_2, \ldots c_n, M)$ la surface applicable sur le plan, formée de morceaux de développables analytiques dont les lignes singulières — c'est-à-dire les frontières communes à deux morceaux analytiques — sont les courbes qui correspondent à $c_1, c_2, \ldots c_n$, et qui est confondue avec S autour du point M.

Soient maintenant $c_1, c'_1; c_2, c'_2; \ldots$ des courbes analytiques planes ne se rencontrant pas.

Considérons les surfaces

$$S,\ \Sigma\,(S, c_1, c'_1, M),\ \Sigma\,(S, c_1, c'_1, c_2, c'_2, M)\ldots,$$

si les courbes c_i, c'_i sont convenablement choisies, ces surfaces auront une surface limite applicable sur le plan.

Pour obtenir l'exemple du paragraphe précédent il faut choisir pour

(*) Ou du moins dont un morceau comprenant un arc de C est applicable sur le plan.

surface S le cône

$$z^2 = x^2 + y^2, \qquad z > 0,$$

pour courbes c_i, c'_i celles qui correspondent aux parallèles de ce cône passant par les points A_i, B_i (notations du paragraphe 48) situés sur la génératrice

$$y = 0, \qquad z = x$$

et pour point M, l'origine O.

Désignons par $\Sigma\,(S,\ c_1,\ c'_1,\ c_2,\ c'_2,\ldots O)$ la surface ainsi obtenue.

80. On peut passer de cette surface à son développement par une déformation continue. Pour le voir, considérons le développement du cône S supposé fendu le long de la génératrice $y = 0$, $z = x$. Ce développement est un secteur que nous supposons placé dans le plan des $x\,y$ du côté des y positifs, la génératrice $y = 0$, $z = x$ ayant pour transformée la partie positive de l'axe des x, et la portion du cône voisine de cette génératrice et située du côté des y positifs ayant pour transformée la portion du plan des $x\,y$ voisine de l'axe des x. Soit $S(0)$ ce secteur, c'est sur lui que sont tracées les circonférences c_i, c'_i. Désignons par $S(t)$ le cône

$$z^2 = t^2(x^2 + y^2), \qquad z > 0,$$

ou plus exactement la portion de cône applicable sur $S(0)$ limitée par la génératrice $y = 0$, $z = t\,x$ et qui, dans le voisinage de cette génératrice, est du côté des y positifs.

$S(1)$ est le cône considéré précédemment S.

Si t représente le temps, par une déformation continue conservant les longueurs, on passe de la surface $S(0)$ (à l'origine des temps), au cône S (au temps 1). On passe de même de la surface $\Sigma\,[S(0),\ c_1, c'_1, c_2, c'_2 \ldots c_n, c'_n, O]$ à la surface $\Sigma\,[S,\ c_1, c'_1, c_2, c'_2 \ldots c_n, c'_n, O]$ par l'intermédiaire des surfaces $\Sigma\,[S(t),\ c_1,\ c'_1 \ldots c_n,\ c'_n,\ O]$.

Ces surfaces ont, t restant fixe, une surface limite $\Sigma\,[S(t),\ c_1, c'_1 \ldots O]$. La transformation ponctuelle

$$X = x, \quad Y = y, \quad Z = \Psi_t(z)$$

qui permet de passer de cette surface de révolution, supposée entière, au cône $S(t)$, supposé entier est définie par une fonction $\Psi_t(z)$ qui admet entre z_0 et z_1 une variation totale égale à $(z_0 - z_1)$ (*). Donc cette surface est applicable sur $S(0)$.

(*) On le verrait en reprenant les raisonnements du paragraphe 18.

Comme les surfaces $S(0)$, $\Sigma[S(0), c_1, c'_1, \ldots c_n, c'_n, O]$, $\Sigma[S(0), c_1, c'_1, \ldots O]$ sont identiques, on voit que l'on passe par une déformation continue du secteur plan à la surface de révolution $\Sigma(S, c_1, c'_1, \ldots, O)$.

Il est facile de réaliser des modèles des surfaces de révolution applicables sur le plan que nous venons d'obtenir.

On sait, à l'aide d'une feuille de papier, réaliser le modèle d'un cône de révolution par une déformation image de la déformation du cône $S(t)$. De même on peut réaliser une déformation du papier, image de la déformation de la surface $\Sigma[S(t), c_1, O]$, ce qui donne un modèle de la surface $\Sigma[S, c_1, O]$ laquelle est formée de deux morceaux de cônes de révolution.

D'une manière générale on sait former un modèle de $\Sigma[S, c, c'_1, \ldots c'_n, O]$ par la déformation d'une feuille de papier; donc par ce procédé on réalise, avec telle approximation que l'on veut, l'image de $\Sigma(S, c_1, c'_1, c_2, c'_2, \ldots, O)$.

Si l'on admet que l'on peut réaliser par déformation du papier l'image de toute développable analytique, les images de toutes les surfaces définies au § 79 s'obtiendront par le même procédé.

La déformation d'une feuille de papier nous permet donc d'obtenir des images des surfaces non analytiques applicables sur le plan aussi parfaites que celles que l'on obtient par le même procédé pour représenter les surfaces analytiques. En ce sens, on peut dire que, pour prévoir l'existence de surfaces non analytiques applicables sur le plan, il suffisait de remarquer combien la forme des surfaces physiquement applicables sur le plan diffère de celle des surfaces développables.

Notons encore que le procédé en apparence le plus simple, celui qui s'est le premier présenté à l'esprit, permettant de faire correspondre un problème géométrique au problème physique de la déformation des surfaces, conduit à la considération de fonctions continues n'ayant pas de dérivées.

81. Les résultats précédents sont en contradiction avec les énoncés classiques relatifs à l'application et à la déformation des surfaces. Nous avons, par exemple, trouvé des surfaces applicables sur le plan et non développables.

La contradiction n'est qu'apparente. Les énoncés classiques sont en effet obtenus à l'aide de raisonnements qui supposent implicitement ou explicitement l'existence et la continuité de toutes les dérivées que l'on est conduit à considérer. Le nombre de ces dérivées varie d'une question à l'autre, dans quelques raisonnements on suppose même que les fonctions dont on s'occupe sont analytiques, de sorte que les énoncés classiques ne sont démontrés que pour certains ensembles de surfaces qui varient suivant la nature de la question. D'une

manière générale, les démonstrations sont valables pour l'ensemble des surfaces analytiques et, le plus souvent, les surfaces analytiques ne forment qu'une classe très particulière dans l'ensemble de celles auxquelles s'appliquent les raisonnements employés.

Prenons par exemple ce théorème: Toutes les surfaces applicables sur le plan sont développables.

La démonstration qu'en a donnée Ossian Bonnet (*) *s'applique à toutes les surfaces ayant des rayons de courbure principaux variant d'une façon continue.* En effet Ossian Bonnet démontre que si x, y, z sont les coordonnées d'un point de la surface, α, β celles du point correspondant du plan, on doit avoir

$$\frac{\dfrac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2}}{\dfrac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \beta}} = \frac{\dfrac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2}}{\dfrac{\partial^2 y}{\partial \alpha \partial \beta}} = \frac{\dfrac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2}}{\dfrac{\partial^2 z}{\partial \alpha \partial \beta}}$$

et de là il conclut que les trois fonctions $\frac{\partial x}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial z}{\partial \alpha}$ sont fonctions de l'une d'entre elles, et la théorie ordinaire du déterminant fonctionnel suppose la continuité des dérivées qui interviennent dans le jacobien.

Les dérivées secondes $\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2}$, $\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \beta}$, ... doivent donc exister et être continues pour que le raisonnement d'O. Bonnet ait un sens, ce qui revient à supposer que la surface jouit de la propriété géométrique indiquée.

Les surfaces construites au paragraphe 78 nous montrent que non seulement l'énoncé du théorème d' Ossian Bonnet n'est légitimé que pour certaines surfaces mais encore qu'il n'est exact que si l'on fait certaines restrictions sur la nature des surfaces considérées.

82. Comme autre exemple prenons la réciproque du théorème d'Ossian Bonnet:

Toute surface développable est applicable sur le plan.

On la démontre ordinairement en supposant que l'on appelle surface développable la surface formée par les tangentes à une courbe gauche ayant des plans osculateurs variant d'une façon continue, car on met le ds^2 de la

---

(*) *Annali di Matematica*, 2.e Série, Tome VII. Cette démonstration est reproduite avec les mêmes notations dans le Tome I des *Leçons sur la théorie des Surfaces* de M.r Darboux et dans les *Traités d'Analyse* de MM.rs Jordan et Picard.

surface sous la forme

$$d s_1^2 = \left(d s + d l + i l \frac{d s}{R}\right) e^{i \int \frac{d s}{R}} \cdot \left(d s + d l - i l \frac{d s}{R}\right) e^{-i \int \frac{d s}{R}}$$

(notations du traité d'Analyse de M.r Picard), R désignant le rayon de courbure de la courbe gauche.

On donne couramment au mot surface développable deux significations distinctes. On appelle ainsi:

1.° Une surface décomposable en cônes, cylindres et surfaces engendrées par les tangentes à une courbe gauche.

2.° La surface enveloppe d'un plan dépendant d'un paramètre. — C'est cette définition qui sert dans le théorème d'Ossian Bonnet.

Soit

$$u x + v y + w z + p = 0$$

ce plan. — L'enveloppe est définie par cette équation et

$$u' x + v' y + w' z + p' = 0,$$

les dérivées étant prises par rapport au paramètre t dont dépend le plan. C'est-à-dire que l'on obtient l'équation de la surface en résolvant par rapport à t cette seconde équation et en portant dans la première. D'après la théorie des équations implicites cela suppose l'existence et la continuité de u'', v'', w'', p''; mais il n'en résulte pas que la surface soit développable au sens 1.

Supposons en effet que φ'' soit continue, le plan

$$z = t x + t^2 y + \varphi(t) \tag{1}$$

a une enveloppe. Les génératrices données par (1) et

$$o = x + 2 t y + \varphi'(t) \tag{2}$$

varient d'une façon continue. Si donc la courbe donnée par (1), (2) et

$$o = 2 y + \varphi''(t)$$

était tangente aux génératrices elle serait rectifiable. Or on peut prendre $\varphi''(t)$ à variation non bornée, donc la surface (1), (2) est développable au sens 2 sans l'être au sens 1. Il est d'ailleurs évident que toute surface développable au sens 1 ne l'est pas nécessairement au sens 2.

L'énoncé de la réciproque du théorème d'Ossian Bonnet suppose donc que le mot développable ait le sens restreint donné au commencement de ce paragraphe.

Pour obtenir un résultat un peu plus général nous allons rechercher dans quels cas on peut appliquer sur le plan un cylindre, un cône, une surface formée des tangentes à une courbe gauche.

83. Pour qu'un cylindre soit applicable sur le plan il faut qu'entre deux quelconques de ses points on puisse tracer une courbe rectifiable. Si les deux points choisis ne sont pas sur une même génératrice la projection de cette courbe, sur le plan de la section droite du cylindre, ne se réduit pas à un point et par suite est une courbe portée par la courbe section droite; c'est-à-dire que si

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t)$$

est la section droite la projection considérée a des équations qui s'obtiennent en remplaçant dans ces formules t par une fonction continue d'un paramètre.

La projection étant rectifiable, la section droite l'est aussi (*).

Pour qu'un cylindre soit applicable sur le plan il est donc nécessaire que sa section droite soit rectifiable; cela est aussi suffisant. En effet prenons sur la section droite une origine O, et faisons correspondre à tout point a de cette section droite le point A de l'axe des x tel que OA soit égal à la longueur de l'arc Oa de section droite. Faisons correspondre de plus à toute génératrice une parallèle à l'axe des y (les axes sont rectangulaires) les longueurs portées par les génératrices étant conservées. Cette correspondance réalise l'application.

Soient en effet c une courbe du cylindre, C la courbe correspondante du plan, a et b deux points de c, A et B les points correspondants de C, a_1 et b_1 les points de la section droite appartenant aux mêmes génératrices que a et b, A_1 et B_1 les points correspondants du plan. On a évidemment

$$\overline{A_1 B_1} > \overline{a_1 b_1}$$

et par suite $\overline{AB} > \overline{ab}$.

Les deux trapèzes rectangles $a a_1 b_1 b$, $A A_1 B_1 B$ ont mêmes bases, donc la différence entre les hypoténuses est inférieure à celle des hauteurs,

$$\overline{AB} - \overline{ab} > \overline{A_1 B_1} - \overline{a_1 b_1}.$$

(*) C'est de là que résulte une propriété qui nous a déjà servi: sur un cylindre dont la section droite n'est pas rectifiable, les seules courbes rectifiables sont portées par les génératrices.

D'où, si l'on divise c en arcs tels que $a\,b$

$$\Sigma \overline{A\,B} - \Sigma \overline{a\,b} = \Sigma (\overline{A\,B} - \overline{a\,b}) > \Sigma (\overline{A_1\,B_1} - \overline{a_1\,b_1}) = \Sigma \overline{A_1\,B_1} - \Sigma \overline{a_1\,b_1}.$$

Les deux premières sommes tendent vers les longueurs de C et c, les deux dernières vers les longueurs des projections de C et c sur l'axe des x d'une part, sur la section droite d'autre part. Ces deux dernières sommes sont égales, donc C et c ont la même longueur.

84. Résolvons le même problème pour les cônes. Soit un cône ayant pour sommet l'origine, s'il est applicable sur le plan il contient des courbes rectifiables non portées par les génératrices. Soit

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t),$$

une de ce courbes. La courbe rectifiable

$$x = \frac{f(t)}{\sqrt{f^2 + \varphi^2 + \psi^2}}, \quad y = \frac{\varphi(t)}{\sqrt{f^2 + \varphi^2 + \psi^2}}, \quad z = \frac{\psi(t)}{\sqrt{f^2 + \varphi^2 + \psi^2}}$$

est portée par une directrice sphérique du cône. On appelle ainsi pour le cône dont les génératrices ont les cosinus directeurs

$$\alpha = f_1(t), \qquad \beta = \varphi_1(t), \qquad \gamma = \psi_1(t)$$

les courbes

$$x = k\,f_1(t), \qquad y = k\,\varphi_1(t), \qquad z = k\,\psi_1(t),$$

k étant indépendant de t.

Dans un cône applicable sur le plan la directrice sphérique est donc rectifiable. Et réciproquement tout cône à directrice sphérique rectifiable est applicable sur le plan comme on le voit en faisant correspondre à la directrice sphérique un arc de cercle de rayon égal à celui de la directrice sphérique et aux génératrices des rayons de cet arc.

Dans cette application si la directrice sphérique a une longueur supérieure à la circonférence qui porte sa transformée, à un point du plan correspondront plusieurs points du cône; mais autour de chaque point du cône, le sommet excepté, on peut trouver un fragment du cône pour lequel la transformation précédente réalise une correspondance biunivoque avec un certain domaine du plan; cette correspondance conserve les longueurs comme le montre un raisonnement analogue à celui du précédent paragraphe. On dit d'un tel cône qu'il est applicable sur le plan sans rechercher si après l'application un point du plan correspond ou non à un seul point du cône.

On peut encore dire que *la condition nécessaire et suffisante pour qu'un cône ou un cylindre soit applicable sur le plan est qu'il existe sur la surface une courbe rectifiable rencontrant toutes les génératrices, et ne passant pas par le sommet s'il s'agit d'un cône.*

Remarquons que, puisqu'il existe des fonctions dérivables à variation non bornée, il existe des courbes ayant des tangentes en tout point et qui ne sont pas rectifiables, *donc des cônes et des cylindres ayant des plans tangents suivant chaque génératrice et qui ne sont pas applicables sur le plan.*

85. Considérons une surface réglée et supposons qu'on puisse, sur cette surface, tracer deux courbes rectifiables ne se rencontrant pas et rencontrant chacune une fois chacune des génératrices; soient $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$; $x(\theta)$, $y(\theta)$, $z(\theta)$ ces deux courbes. A chaque point t de la première courbe faisons correspondre le point θ de la seconde situé sur la même génératrice, alors θ est une fonction continue toujours croissante ou décroissante de t. En remplaçant θ par sa valeur en fonction de t la seconde courbe devient $x_1(t)$, $y_1(t)$, $z_1(t)$.

La courbe

$$x = x(t) - x_1(t), \qquad y = y(t) - y_1(t), \qquad z = z(t) - z_1(t)$$

rencontre toutes les génératrices du cône directeur de la surface dont le sommet est l'origine, cette courbe étant rectifiable, le cône est applicable sur le plan.

Ceci posé nous allons démontrer que *pour que la surface formée par les tangentes à une courbe gauche soit applicable sur le plan il est nécessaire et suffisant que son cône directeur soit applicable sur le plan.* Dans cet énoncé nous appelons surface applicable sur le plan une surface à tout point de laquelle on peut faire correspondre un point du plan, cette correspondance conservant les longueurs; à un point du plan correspond un nombre fini ou infini de points de la surface.

D'après ce qui précède la condition est nécessaire; pour montrer qu'elle est suffisante, effectuons d'abord l'application du cône directeur sur le plan. Nous allons maintenant faire correspondre à la courbe gauche donnée Γ une courbe plane γ, les arcs correspondants ayant la même longueur, la tangente en tout point a de γ étant parallèle au développement de celle des génératrices du cône directeur qui est parallèle à la tangente à Γ au point A homologue de a (*).

(*) Cette propriété du développement de l'arête de rebroussement doit être considérée comme la généralisation du théorème classique: la courbure de l'arête de rebroussement est conservée.

Pour construire γ, divisons Γ à l'aide des points A_i correspondant aux valeurs t_i du paramètre, et portons sur les génératrices $O\,a'_i$ correspondantes du développement du cône directeur des longueurs $O\,a'_i = s\,(t_i) - s\,(t_{i-1})$; $s\,(t)$ représentant la longueur de l'arc $(0,\ t)$ de Γ.

Soit $O\,M_i$ le vecteur somme de $O\,a'_1,\ O\,a'_2 \ldots O\,a'_i$. Considérons le polygone $O\,M_1\,M_2\,M_3 \ldots$, si nous supposons $t_0 = 0$ la longueur $O\,M_1\,M_2 \ldots M_i$ comptée sur ce polygone est égale à $s\,(t_i)$. Faisons correspondre ce polygone à Γ de façon que les longueurs soient conservées; alors M_i correspond à A_i.

Introduisons entre les t_i de nouvelles valeurs de t, d'où la suite de points

$$B_0\,(\text{ou } O),\ B_1,\ B_2 \ldots B_j\,(\text{ou } A_1),\ B_{j+1},\ B_{j+2} \ldots B_k\,(\text{ou } A_2) \ldots$$

et un nouveau polygone de sommets

$$O,\ N_1,\ N_2 \ldots N_j,\ N_{j+1} \ldots$$

Supposons que l'on augmente indéfiniment le nombre des t_i de façon que le maximum de $t_i - t_{i-1}$ tende vers zéro et montrons que ces polygones ont une limite, il suffira de démontrer que les points correspondant aux valeurs choisies t_i tendent uniformément vers des points limites.

Soient M_i et N_{α_i} deux sommets correspondants des deux polygones considérés. On a:

$$\text{long } M_i\,N_{\alpha_i} \leqq |\text{long } O\,M_i - \text{long } O\,N_{\alpha_i}|$$

$$\leqq \sum_1^i |\text{long } M_i\,M_{i-1} - \text{long } N_{\alpha_i}\,N_{\alpha_{i-1}}|.$$

La longueur $M_i\,M_{i-1}$ est celle du segment $O\,a'_i$; celle de $N_{\alpha_i}\,N_{\alpha_{i-1}}$ est celle de la résultante des segments

$$O\,b'_{\alpha_{i-1}+1},\ O\,b'_{\alpha_{i-1}+2} \ldots O\,b'_{\alpha_i}.$$

La somme des longueurs de ces segments est $O\,a'_i$, et ils font entre eux des angles inférieurs à ε, si ε est le maximum des angles $a'_i\,O\,a'_{i-1}$ donc

$$0 \leqq \text{long } M_i\,M_{i-1} - \text{long } N_{\alpha_i}\,N_{\alpha_{i-1}} \leqq \varepsilon\,[s\,(t_i) - s\,(t_{i-1})].$$

Ainsi si l'on s'occupe de l'arc $(0,\ t)$ de Γ, quels que soient les nouveaux points choisis sur Γ entre les A_i, la distance entre deux points correspondants des polygones est inférieure à $\varepsilon\,s\,(t)$.

Or ε tend vers zéro avec le maximum de $t_i - t_{i-1}$. Les polygones ont donc une courbe limite γ.

Prenons pour axe des x dans le plan la génératrice $O\,a'_0$ du développement du cône directeur; si l'intervalle $(0,\,t)$ est assez petit (*) l'angle des génératrices $O\,a'_1$, $O\,a'_2\ldots$ avec l'axe des x est inférieur à un droit et par suite les polygones dont γ est la limite ont des équations de la forme

$$y = f_1(x),\quad y = f_2(x)\ldots$$

Supposons que ces équations représentent, non les polygones tels que $O\,A_1\,A_2\ldots$ mais les courbes que l'on obtient en raccordant les côtés consécutifs $A_{i-1}\,A_i$, $A_i\,A_{i+1}$ par des arcs de cercles. Nous supposerons ces arcs choisis assez petits pour que les longueurs des courbes tendent vers la longueur commune des polygones, c'est-à-dire vers celle de Γ. Les fonctions $f_i(x)$ ont des dérivées continues. De plus, quand i augmente, la dérivée $f'_i(x_0)$ tend vers le coefficient angulaire de la génératrice du développement du cône directeur qui correspond au point $x = x_0$ de γ, soit $\varphi\,(x_0)$.

Les fonctions bornées dans leur ensemble $f'_i(x)$ tendent vers $\varphi\,(x)$, donc on a:

$$\operatorname{Lim}\int_0^x f'_i(x)\,d\,x = \operatorname{Lim} f_i(x) = \int_0^x \varphi\,(x)\,d\,x.$$

Donc γ a pour équation:

$$y = \int_0^x \varphi\,(x)\,d\,x,$$

et comme $\varphi\,(x)$ est une fonction continue

$$y'_x = \varphi\,(x)$$

et les tangentes à γ sont bien parallèles aux génératrices correspondantes du développement du cône directeur.

De plus

$$\operatorname{Lim}\int_0^x \sqrt{1 + \overline{f'_i(x)}^2}\,d\,x = \int_0^x \sqrt{1 + \varphi^2\,(x)}\,d\,x$$

donc γ a même longueur que Γ.

(*) Cette restriction est sans importance, il suffit en effet de démontrer que, autour de chaque génératrice, on peut trouver un morceau applicable sur le plan pour qu'il en soit de même pour toute la surface.

86. Nous allons maintenant définir la correspondance entre le plan et la surface. A tout point de Γ correspond un point de γ comme il a été dit. A un point A de la surface situé sur la génératrice passant par le point A_1 de Γ correspond un point a situé sur la tangente à γ au point a_1 homologue de A_1 et tel que $a_1 a = A_1 A$, ces deux segments étant dirigés par rapport à γ et Γ, dans des sens correspondants.

Désignons par A' le point du cône directeur situé sur la génératrice parallèle à $A_1 A$ et tel que

$$\overline{A_1 A} = \overline{O A'}$$

et par a' le développement de A'. Alors on a

$$\overline{a_1 a} = \overline{O a'}.$$

Soient C une courbe rectifiable de la surface, c, C', c' les lieux des points a, A', a' correspondant aux points A de C. On a les égalités segmentaires, si A et B sont sur C,

$$\overline{A B} = \overline{A_1 B_1} + \overline{A' B'},$$

$$\overline{a b} = \overline{a_1 b_1} + \overline{a' b'},$$

donc

$$|\operatorname{long} A B - \operatorname{long} a b| \leqq |\operatorname{long} A_1 B_1 - \operatorname{long} a_1 b_1| + |\operatorname{long} A' B' - \operatorname{long} a' b'|.$$

Supposons que C ne rencontre qu'une seule fois chaque génératrice. Alors C' est rectifiable, § 85, et l'on a :

$$|\operatorname{long} A B - \operatorname{long} a b| \leqq |\operatorname{long arc} A_1 B_1 \text{ de } \Gamma - A_1 B_1| +$$
$$+ |\operatorname{long arc} a_1 b_1 \text{ de } \gamma - a_1 b_1| + |\operatorname{long arc} A' B' \text{ de } C' - A' B'| +$$
$$+ |\operatorname{long arc} a' b' \text{ de } c' - a' b'|.$$

Si donc on considère un polygone P inscrit dans C et les polygones p, P', p', P_1, p_1 correspondants on a :

$$|\operatorname{long} P - \operatorname{long} p| \leqq (\operatorname{long} \Gamma - \operatorname{long} P_1) + (\operatorname{long} \gamma - \operatorname{long} p_1) +$$
$$+ (\operatorname{long} C' - \operatorname{long} P') + (\operatorname{long} c' - \operatorname{long} p').$$

Donc C et c ont même longueur. Ce résultat s'étend immédiatement aux courbes qui rencontrent un nombre fini de fois les génératrices. Pour les autres, qui sont limites de courbes ne rencontrant les génératrices qu'un nombre fini de fois, nous pouvons affirmer que la longueur de la courbe de

la surface est au moins égale à la longueur de la courbe correspondante du plan.

Mais la portion considérée de γ est convexe, les tangentes aux deux extrémités font un angle inférieur à un droit; donc, si l'on ne considère que l'une des nappes de la surface (limitée par Γ), la correspondance avec le plan est univoque.

Soit, dans la portion du plan correspondante, un segment $a\,b$; considérons-le comme la courbe c. On voit immédiatement que c est rectifiable, donc c' l'est et par suite aussi C. De là résulte que l'on a:

$$A\,B \leq a\,b.$$

Ceci posé, soit une courbe rectifiable quelconque C, inscrivons dans cette courbe une ligne polygonale P d'un nombre fini ou infini de côtés, en ayant soin que tous les points de rencontre de C et de Γ soient des sommets (ou limites de sommets) de ce polygone, p étant le polygone correspondant on a:

$$\text{long}\, p \geqq \text{long}\, P,$$

d'où

$$\text{long}\, c \geqq \text{long}\, C.$$

En rapprochant ce résultat du précédent on a:

$$\text{long}\, c = \text{long}\, C$$

et la surface est applicable sur le plan.

Nous savons donc construire la courbe gauche la plus générale dont les tangentes forment une surface applicable sur le plan; il suffit en effet de se donner le cône directeur applicable sur le plan, ce que nous savons faire, et la fonction continue positive croissante $s(t)$ et d'en déduire Γ par une construction analogue à celle qui a donné γ.

87. Dans les paragraphes précédents on a appelé surface applicable sur le plan une surface S qui correspond à une surface Σ portée par le plan, la correspondance ponctuelle entre S et Σ étant biunivoque et conservant les longueurs.

S étant donnée, Σ n'est pas déterminée. En effet si S est un cône on peut prendre pour Σ un secteur. Soit G l'un de ses rayons qui partage Σ en Σ_1 et Σ_2 et soit Σ'_2 le symétrique de Σ_2 par rapport à G; on peut prendre pour Σ, $\Sigma_1 + \Sigma'_2$.

Les surfaces Σ que nous venons de définir relativement aux cônes et aux surfaces formées des tangentes à une courbe sont telles qu'autour de chacun de leurs points (ceux qui correspondent au sommet du cône, et aux points de l'arête de rebroussement exceptés) on puisse trouver un morceau de Σ ne recouvrant qu'une fois le plan. Soit Σ_1 un tel morceau, S_1 le morceau correspondant de S; entre S_1 et Σ_1 la correspondance ponctuelle est biunivoque et Σ_1 est un domaine plan.

C'est la surface Σ ainsi définie, qui est unique puisque deux de ces surfaces seraient composées de morceaux égaux disposés pareillement, que l'on appelle le développement de S.

88. Nous pouvons maintenant donner des exemples de *courbes gauches dont les tangentes forment une surface non applicable sur le plan.*

$$x = t, \qquad y = t^2, \qquad z = \varphi(t)$$

$\varphi(t)$ étant une fonction dont la dérivée est continue mais à variation non bornée, nous donnent un tel exemple. On sait que l'on peut même supposer que $\varphi''(t)$ existe, donc il y a des *courbes gauches ayant en tout point un plan osculateur, et dont les tangentes forment une surface non applicable sur le plan. Une telle surface admet des plans tangents; le plan tangent est le même tout le long d'une génératrice; le plan tangent dépend donc d'un seul paramètre.*

89. Nous terminerons en cherchant les surfaces de révolution applicables sur le plan.

Démontrons d'abord que, si un morceau de surface de révolution est applicable sur le plan, les méridiens correspondent à des droites parallèles ou concourantes. Il est évident que les méridiens étant des lignes de longueur minimum ou géodésiques ont pour transformées des géodésiques du plan, c'est-à-dire des droites.

Soient A, B deux points d'un méridien, a, b leurs correspondants dans le plan; A', B' deux points d'un autre méridien situés respectivement sur les parallèles de A et B, a', b' leurs homologues.

On a $ab = a'b'$; d'ailleurs les deux courbes de la surface qui correspondent aux deux droites ab, $a'b'$ sont symétriques l'une de l'autre par rapport au plan bissecteur des méridiens de A et de A'; elles sont égales et

$$ab' = a'b.$$

La figure $abb'a'$ est donc un trapèze isocèle.

Soient A'', B'' les symétriques de A, B par rapport au plan méridien de A'; $a'' b'' b' a'$ est symétrique de $a b b' a'$ par rapport à $b' a'$, donc les trois droites $a b$, $a' b'$, $a'' b''$ ou bien concourent en un même point O qui est le centre de la circonférence passant respectivement par a, a', a'' et par b, b', b''; ou bien sont parallèles et a, a', a'' d'une part, b, b', b'' d'autre part sont en ligne droite, $a a'$ et $a b$ étant perpendiculaires.

Si l'on fixe la position d'un méridien par son angle θ avec le méridien de A et si A' correspond à θ_0, le raisonnement précédent montre que tous les points du méridien de A correspondant aux valeurs $\frac{m\,\theta_0}{2\,n}$, m et n étant entiers, ont leurs homologues sur la circonférence ou la droite $a a' a''$; ils forment un ensemble partout dense sur cette circonférence. Il en est de même pour les points du méridien de B. Les points des méridiens de A et B correspondant à la même valeur de θ sont sur le même rayon. Donc les méridiens ont pour homologues des droites parallèles ou concourantes et les parallèles correspondent aux trajectoires orthogonales de ces droites.

Supposons d'abord que les droites homologues des méridiens soient parallèles, alors les parallèles sont égaux, donc ont le même rayon et puisque les méridiens sont rectifiables, les seules surfaces de cette nature sont

$$x = R \cos \theta, \qquad y = R \sin \theta, \qquad z = \varphi(t),$$

φ étant à variation bornée.

Supposons maintenant les droites concourantes. Soient A, B, C trois points du même méridien, en conservant les notations précédentes on a :

$$\frac{a\,b}{b\,c} = \frac{\text{arc}\; b\,b' - \text{arc}\; a\,a'}{\text{arc}\; c\,c' - \text{arc}\; b\,b'}$$

c'est-à-dire que si l'axe des z est l'axe de révolution, la méridienne est de la forme $z = f(x)$, et s étant son arc, on a :

$$\frac{\delta\, s}{\delta\, x} = \text{constante}$$

quel que soit $\delta\, x$. La distance de deux points d'abscisses x_0 et x_1 étant au moins $|x_0 - x_1|$, la constante est au moins égale à 1, nous poserons

$$\delta\, s = \sqrt{1 + K^2}\, \delta\, x.$$

Si K est nul, la surface est engendrée par l'axe des x tournant autour de l'axe des z, c'est le plan des $x\,y$.

Supposons maintenant K positif. Une solution particulière du problème s'obtient en effectuant la transformation ponctuelle

$$X = x, \qquad Y = y, \qquad Z = \psi(z)$$

(ψ ayant dans tout intervalle de longueur l une variation totale égale à l) sur le cône

$$z^2 = K^2 (x^2 + y^2);$$

nous allons démontrer que c'est la solution générale.

Soit en effet $z = f(x)$ une méridienne, si $v(x)$ est la variation totale de f entre x_0 et x, la surface de révolution dont $z = v(x)$ est la méridienne est aussi applicable sur le plan. Nous allons démontrer que $v(x)$ est égale à $K(x - x_0)$.

Soient deux points (x_0, x_1) de la courbe $z = v(x)$, la longueur de l'arc de cette courbe compris entre ces deux points est supérieure à

$$\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + \overline{v(x_1) - v(x_0)}^2};$$

cette quantité doit donc être inférieure à $K|x_1 - x_0|$ c'est-à-dire que l'on a:

$$0 < \frac{v(x_1) - v(x_0)}{x_1 - x_0} \leqq K.$$

Ceci posé considérons un polygone inscrit dans $z = v(x)$ et le polygone Q inscrit dans $z = K(x - x_0)$ dont les sommets ont les mêmes abscisses, il est évident que

$$\text{long}\, P \leqq \text{long}\, Q.$$

Des considérations de géométrie élémentaire montrent que, si R est le polygone inscrit dans $z = K(x - x_0) - v(x)$ dont les sommets ont mêmes abscisses que ceux de P et Q, on a:

$$\text{long}\, Q - \text{long}\, P \geqq \text{long}\, R - (x_1 - x_0)$$

si l'on s'occupe de l'intervalle $x_1 - x_0$.

Si l'on fait tendre vers zéro le maximum de la longueur des côtés de P, le second membre ne tend vers zéro que si $v(x) - K(x - x_0) = 0$, or le premier membre tend vers zéro, donc:

$$v(x) = K(x - x_0).$$

Les seules surfaces de révolution applicables sur le plan sont donc celles que

l'on obtient par la transformation du § 78 appliquée aux surfaces de révolution analytiques applicables sur le plan, l'axe de révolution étant Oz.

90. Considérons une surface applicable sur le plan. Si l'on exprime les coordonnées d'un point de cette surface en fonction de celles du point correspondant du plan, on a la surface sous forme rectifiable, elle est donc quarrable.

Nous allons démontrer que dans l'application sur le plan les aires sont conservées. Le raisonnement s'étendrait d'ailleurs aux surfaces applicables sur une surface analytique quelconque.

Soit une surface S applicable sur le plan (u, v). Divisons le plan (u, v) à l'aide de parallèles aux trois directions $\omega = 0$, $\omega = 60^\circ$, $\omega = 120^\circ$ en triangles équilatéraux. A un réseau de ces triangles correspond un polyèdre inscrit dans la surface S; chaque face de ce polyèdre étant d'aire inférieure au triangle correspondant du plan (u, v), l'aire de S est au plus celle du domaine correspondant dans (u, v).

Considérons maintenant une suite de surfaces S_i tendant vers S. Choisissons arbitrairement un nombre l et soit m_i le minimum de la longueur des courbes Γ_i de S_i qui correspondent à celles Γ joignant les couples de points du plan (u, v) qui sont distants d'au moins l.

La plus petite limite des m_i quand $\frac{1}{i}$ tend vers zéro est au moins l. En effet si elle était inférieure à l on pourrait trouver une suite de courbes Γ_{i_1}, $\Gamma_{i_2} \ldots$ dont les longueurs auraient une limite inférieure à l. Or cela est impossible car on démontrerait l'existence d'une courbe de longueur inférieure à l limite de certaines des courbes Γ_{i_1}, $\Gamma_{i_2} \ldots$ c'est-à-dire d'une courbe correspondant à une courbe Γ du plan (u, v).

Donc si i est supérieur à un certain nombre i_0 les courbes joignant des points des côtés opposés d'un carré de côté l du plan (u, v) ont pour homologues des courbes de la surface S_i de longueurs supérieures à $l - \varepsilon$.

Soient M et M_i les parties de S et S_i correspondant à ce carré. Nous pouvons sans augmenter la plus petite limite des aires des S_i, supposer que les surfaces S_i sont analytiques.

Divisons M_i par deux séries de courbes orthogonales C_p, C'_p homologues de courbes du plan (u, v) joignant des points des côtés opposés du carré. Soient $a_{j,k}$ la longueur de l'arc déterminé sur C_k par C'_j et C'_{j+1} et $a'_{k,j}$ la longueur de l'arc déterminé par C_j et C_{j+1} sur C'_k. L'aire de M_i est la limite de la somme

$$\sum_k \sum_j a_{kj} a'_{kj}$$

quand le maximum de a_{kj} et a'_{kj} tend vers zéro. Or cette somme est évidemment supérieure à $(l - \varepsilon)^2$, donc la plus petite des aires des M_i est l^2.

Lorsqu'une surface est applicable sur un plan, les parties correspondantes du plan et de la surface ont donc même aire si elles sont quarrables et, si elles ne le sont pas, mêmes aires intérieure et extérieure.

Lorsque deux surfaces analytiques sont applicables l'une sur l'autre, les longueurs, les aires et les angles sont conservés; on voit que lorsqu'il s'agit de surfaces non analytiques les longueurs et les aires sont encore conservées, mais les angles ne le sont plus (*).

CHAPITRE VI.

Le Problème de Plateau.

91. Nous nous proposons dans ce chapitre de démontrer l'existence d'une surface S ayant pour frontière un contour C donné et pour aire intérieure l'aire minima de C. L'aire de toute autre surface ayant pour frontière C sera au moins égale à celle de S; en ce sens l'aire de S sera un minimum et la surface S pourra être dite *minima*. Dans le cas où l'on se limite à la considération des surfaces ayant tous les éléments que l'on considère ordinairement (plans tangents, rayons de courbure, etc.) ce problème a reçu le nom de *problème de* Plateau.

Il n'est pas démontré que le problème de Plateau ait une solution; nous allons voir que si l'on n'astreint la surface minima à aucune condition supplémentaire, l'existence de cette surface peut être facilement démontrée. Les résultats que nous allons obtenir peuvent ainsi être considérés comme préparant l'étude de l'existence de la solution du problème de Plateau.

(*) Supposons réalisée l'image matérielle d'une surface. L'aire, au sens usuel du mot, d'une telle surface peut être mesurée par la masse de la matière qui la constitue. Dans une déformation de la surface cette masse ne change pas, aussi l'aire, au sens usuel du mot, ne change pas. L'une des conditions que doit remplir l'aire, au sens mathématique, pour qu'on puisse l'assimiler à l'aire, au sens usuel du mot, et pour qu'on puisse considérer la déformation physique d'une surface comme l'image d'une déformation géométrique, est donc d'être inaltérée par les déformations géométriques qui conservent les longueurs.

Les raisonnements qui suivent s'appliquent à d'autres problèmes que celui de Plateau; pour énoncer ces problèmes nous allons d'abord définir certaines intégrales de courbe et de surface.

92. Considérons une courbe C dont les points dépendent d'une façon continue d'un paramètre t, une fonction de t sera dite attachée aux points de C. Supposons C rectifiable et $f(t)$ continue. Divisons C en un nombre fini d'arcs partiels de longueurs l_1, l_2... et soient f_1, f_2,... des valeurs de f pour certains points de ces arcs partiels. La somme $\Sigma\, l_i f_i$ quand le maximum des l_i tend vers zéro, tend vers une limite déterminée (*) que nous représenterons par

$$\int_C f(t)\, d\, s.$$

Si $f(t) = 1$ l'intégrale représente la longueur.

Considérons une surface quarrable S dont les points dépendent d'une façon continue de (u, v) et une fonction continue $f(u, v)$ attachée aux points de cette surface. Divisons S en un nombre fini de morceaux quarrables d'aires a_1, a_2,... et soient f_1, f_2,... des valeurs de f pour certains points de ces morceaux quarrables. Quand le maximum du diamètre de ces morceaux et le maximum de a_i (**) tendent vers zéro la somme $\Sigma\, f_i a_i$ tend vers une limite déterminée que nous représenterons par

$$\iint_S f(u,\ v)\, d\, a.$$

Si $f(u, v) = 1$ l'intégrale représente l'aire.

On aurait pu définir ces intégrales par le procédé suivant. Il est facile de faire correspondre à C un segment, les longueurs étant conservées; il est possible de démontrer qu'on peut établir entre les points de S et les points d'un plan une correspondance conservant les aires (***). Ces correspondances établies, elles définissent sur la droite ou dans le plan une fonction F qui correspond à f; l'intégrale de F est égale à l'intégrale de courbe ou de surface que nous avons définie.

(*) Il suffit de reprendre le raisonnement classique relatif à l'existence de l'intégrale d'une fonction continue pour obtenir ce résultat.

(**) Il est facile de démontrer que cette seconde condition est une conséquence de la première.

(***) Il se peut que cette correspondance ne soit pas univoque.

L'un et l'autre procédé permettent d'indiquer dans quels cas on dira que f est sommable et par suite d'étendre la définition de l'intégrale au cas où f n'est pas continue; mais cela ne nous sera d'aucune utilité.

93. Considérons une famille de courbes rectifiables C et une famille de surfaces quarrables S. Et soit f une fonction définie dans l'ensemble des points de tous les C ou S, et jamais négative. Nous supposerons que f est continue dans cet ensemble. Les intégrales

$$\int_C f\,d\,s,\quad \iint_S f\,d\,a$$

ont alors un sens. Démontrons que si C (ou S) est la limite des courbes C_i (ou des surfaces S_i) prises dans la famille considérée, l'intégrale relative à C (ou S) est au plus égale à la plus petite des limites des intégrales relatives à C_i (ou S_i).

Divisons C (ou S) en un nombre fini de morceaux de longueurs (ou d'aires) m_1, $m_2\ldots$ et soient γ_1, $\gamma_2\ldots$ les valeurs minima de f dans les morceaux correspondants. A la division de C (ou S) correspond sur C_i (ou S_i) une division en morceaux de longueurs (ou d'aires) m_1^i, $m_2^i,\ldots$; les valeurs minima de f dans les morceaux correspondants sont γ_1^i, $\gamma_2^i,\ldots$

Quand i augmente indéfiniment γ_j^i a pour limite γ_j et la plus petite des limites de m_j^i est au moins égale à m_j, donc la plus petite limite de $\Sigma_j\, m_j^i\,\gamma_j^i$ est au moins égale à $\Sigma_j\, m_j\,\gamma_j$.

Il suffit d'augmenter indéfiniment le nombre des morceaux de façon que le maximum de leurs diamètres tende vers zéro pour avoir la propriété énoncée.

En adoptant des dénominations dues à M.r Baire on peut dire que l'intégrale considérée est partout égale à son minimum ou encore que, en tant que fonction de C (ou S), elle est semi-continue inférieurement.

Si la famille de courbes (ou surfaces) comprend toutes les surfaces rectifiables (ou toutes les surfaces quarrables) la valeur de l'intégrale pour C (ou S) est exactement la plus petite limite des intégrales relatives aux courbes (ou surfaces) dont C (ou S) est la limite (*); puisqu'on peut choisir les C_i (ou S_i) de manière que γ_j^i ait pour limite γ_j.

(*) Cette propriété aurait pu être prise comme définition de l'intégrale considérée. Cette méthode a l'avantage de suggérer des définitions des intégrales

$$\int f(x, y, x', y')\,d\,t$$

$$\iint f\left(x, y, z, \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}\right) d\,u\,d\,v$$

94. Supposons que les courbes C (ou que les surfaces S) soient toutes celles qui satisfassent à certaines conditions aux limites, — extrémités de C données, ou sur des courbes ou des surfaces données, — frontière de S donnée ou sur des surfaces données.

Nous supposerons de plus que C (ou S) est assujettie à rester dans une portion limitée Π de l'espace, ou que C se déplace sur une surface Σ n'ayant pas de nappe infinie. f étant une fonction continue dans Π ou sur Σ, nous nous proposons de chercher si la fonction

$$\varphi(C) = \int_C f\,ds \qquad \left(\text{ou } \varphi(S) = \iint_S f\,da\right)$$

atteint son minimum.

Lorsque l'on cherche à démontrer qu'une fonction $f(E)$ de certains éléments E atteint son minimum, par la méthode qui sert pour les fonctions continues de points, on est conduit aux deux opérations suivantes:

I. Choisir une suite d'éléments E_1, $E_2 \ldots$ ayant un élément limite e, et tels que $f(E_1)$, $f(E_2) \ldots$ tendent vers la limite inférieure $m\,f(E)$ de $f(E_i)$.

II. Démontrer que $f(e) = m\,f(E)$.

D'après ce que nous venons de dire si c (ou s) est la limite de C_i (ou S_i) $\varphi(c)$ [ou $\varphi(s)$] est au plus égale à la plus petite des limites des $\varphi(C_i)$ [ou $\varphi(S_i)$]; d'ailleurs $\varphi(c)$ [ou $\varphi(s)$] est au moins égale à $m\,\varphi(C)$ [ou $m\,\varphi(S)$], donc nous avons effectué l'opération II.

95. Pour effectuer l'opération I, nous emploierons une méthode que M.r Hilbert a indiquée dans une note des *Nouvelles Annales* (Août 1900), note qu'il avait déjà présentée en septembre 1899 au congrès de Munich.

Ou bien on sait qu'il existe un élément e tel que $f(e) = m\,f(E)$ ou bien on sait qu'on peut trouver une suite d'éléments E_1, $E_2 \ldots$ tels que $f(E_1)$, $f(E_2) \ldots$ aient pour limite $m\,f(E)$. Tout revient à choisir parmi les E_i une suite d'éléments ayant un élément limite.

Nous supposerons que E est une fonction de n variables, continue par rapport à l'ensemble x_1, $x_2 \ldots x_n$ de ces variables, définie dans une portion D de l'espace $(x_1 x_2 \ldots x_n)$, et que l'on a toujours $|E| < P$. Alors E sera dite

---

dans le cas où les fonctions f sont continues et jamais négatives. Le cas où f est continue se ramène à celui-là par l'addition d'une constante. Avec ces définitions on peut faire des applications plus étendues des remarques qui suivent.

la limite (*) de E_i si, quel que soit ε, on peut choisir i assez grand pour que l'on ait:

$$(p > 0) \qquad | E(x_1, x_2, \ldots x_n) - E_{i+p}(x_1, x_2 \ldots x_n) | < \varepsilon$$

pour tout point de D.

M.r Hilbert remarque que si l'on a certains renseignements sur la variation de la fonction E_i il suffit de choisir parmi les E_i une suite d'éléments e_j tels que, à tout point d'un ensemble A partout dense dans D, corresponde une valeur de E_j qui a une limite quand j augmente indéfiniment, pour que les E_j aient une limite. Pour préciser, nous supposerons que l'ensemble des nombres dérivés des E_i considérées comme fonctions d'une seule, quelconque, des variables $x_1, x_2 \ldots x_n$ soit borné.

Nous supposons donc que l'on ait, quels que soient $i, x_1, x_2 \ldots x_n, h, p$

$$\left| \frac{E_i(x_1, x_2 \ldots x_p, x_{p+1} \ldots x_n) - E_j(x_1, x_2, \ldots x_p + h, x_{p+1} \ldots x_n)}{h} \right| < M, \qquad (1)$$

M étant fixe. Nous prenons pour A un ensemble dénombrable partout dense dans P; soient $P_1, P_2, \ldots$ les points de A. Soient $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots$ des nombres décroissant jusqu'à zéro.

Les différentes valeurs $E_i(P_1)$ étant toutes, en valeur absolue, inférieures à P ont au moins une valeur limite α. Nous appelons E_i^1 celles des E_i telles que:

$$| E_i(P_1) - \alpha_1 | < \varepsilon_1$$

et nous appelons e_1 l'une d'elles.

Les valeurs $E_i^1(P_2)$ ont au moins une valeur limite α_2. Nous appelons E_i^2 celles des E_i^1 telles que

$$| E_i^1(P_2) - \alpha_2 | < \varepsilon_2,$$

e_2 est l'une des E_i^2. Nous définissons de même $e_3, e_4, \ldots; \alpha_3, \alpha_4, \ldots$

Nous allons montrer qu'on peut définir une fonction e continue dans D par les égalités $e(P_i) = \alpha_i$.

Des égalités (1) on déduit

$$\left| \frac{E_i(x_1 + h_1, x_2 + h_2 \ldots x_n + h_n) - E_i(x_1, x_2, \ldots x_n)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \cdots + h_n^2}} \right| <$$

$$< \frac{| h_1 | + | h_2 | + \cdots + | h_n |}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \cdots + h_n^2}} M.$$

(*) Nous supposons donc que la fonction E_i tend uniformément vers E. Le mot limite a été employé précédemment dans un sens différent, voir par exemple § 23.

Le maximum du second membre est $\sqrt{n}\, M$, c'est donc aussi le maximum du premier. L'inégalité précédente s'écrit donc

$$\left| \frac{E_i(P) - E_i(Q)}{l(PQ)} \right| < \sqrt{n}\, M,$$

le symbole $l(PQ)$ représentant ce que l'on peut appeler la distance de P à Q.

Ceci posé, considérons tous les points de A distants d'un point M de D de moins de η, ils sont distants entre eux de moins de 2η, donc les α correspondants diffèrent de moins de $2\eta\sqrt{n}\, M$. Donc tous les α correspondant aux P_i tendant vers M ont une valeur limite $e(M)$ qui est fonction continue de M. De plus on a aussi :

$$\left| \frac{e(P) - e(Q)}{l(PQ)} \right| < \sqrt{n}\, M.$$

Désignons par l_i le maximum, quand M parcourt D, de la limite inférieure de $l(MP_1)$, $l(MP_2), \ldots l(MP_i)$, l_i tend vers zéro avec $\frac{1}{i}$. On a, j étant choisi inférieur à i, de façon que $l(MP_j)$ ne soit pas supérieure à l_i,

$$\begin{aligned} |e_i(M) - e(M)| &\leq |e_i(M) - e_i(P_j)| + |e_i(P_j) - e(P_j)| + |e(P_j) - e(M)| \\ &\leq l_i\sqrt{n}\, M + \varepsilon_i + l_i\sqrt{n}\, M, \end{aligned}$$

donc e est la limite de la suite $e_1, e_2 \ldots$

Nous avons supposé que E est une fonction ; si E est un ensemble d'un nombre fini de fonctions dont les nombres dérivés sont bornés, la conclusion subsiste.

Il reste à voir si l'élément limite e ainsi défini fait bien partie des éléments E considérés (*).

96. Reprenons la fonction

$$\varphi(C) = \int_C f\, ds.$$

L'élément C est l'ensemble des trois fonctions qui représentent les coordonnées

---

(*) Dans sa note des *Nouvelles Annales*, M.r Hilbert n'a exposé sa méthode pour établir l'existence de l'élément limite que sur deux exemples particuliers. Il me semble bien que la méthode qui ressort de ces deux exemples est celle du § 95. En tous cas les résultats de ce paragraphe suffisent à démontrer l'existence des éléments limites dans les deux exemples de M.r Hilbert.

des points de C. Supposons que l'on ait $f > k > 0$, alors si $\varphi(C_i)$ tend vers $m\,\varphi(C)$ la longueur de C_i n'augmente pas indéfiniment. Soit L un nombre supérieur aux longueurs des C_i. Les coordonnées des points de ces courbes peuvent être exprimées par des fonctions d'un paramètre t variant entre 0 et L, dont les nombres dérivés sont inférieurs à 1. D'où l'existence d'un élément limite c, puisque nous supposons que C reste dans la portion finie Π de l'espace ou sur la surface Σ. c fait bien partie de la famille des courbes C.

Nous démontrons donc immédiatement l'existence du minimum dans un cas assez étendu (*).

97. Considérons la fonction

$$\varphi(S) = \iint_S f\,d\,a.$$

L'élément S est l'ensemble des trois fonctions qui représentent les coordonnées des points de S. Supposons que l'on ait trouvé une suite S_1, S_2 . . . telle que $\varphi(S_1)$, $\varphi(S_2)$ . . . tendent vers $m\,\varphi(S)$; supposons toutes les S_i exprimées à l'aide des coordonnées (u, v) des points d'un domaine D par des fonctions dont les nombres dérivés sont bornés, alors ce qui précède démontre l'existence d'un élément limite.

Nous obtiendrons un exemple où ces conditions sont réalisées en supposant $f = 1$, les surfaces S étant toutes celles qui ont une frontière donnée C satisfaisant aux conditions suivantes:

1.° La projection de C sur le plan des (x, y) est convexe.

2.° Tout plan qui contient trois points au moins de C fait avec le plan des $x\,y$ un angle inférieur à α. ($\alpha < 90°$).

De la première condition résulte que c est rectifiable, donc le cylindre projetant C est applicable sur le plan. Dans cette application c devient $\omega\,\xi$, et l'une des génératrices $\omega\,\eta$; C devient C_1 d'équation:

$$\eta = \psi(\xi).$$

Toute sécante de C fait, d'après la condition 2, un angle moindre que α avec le plan des $x\,y$, donc a fortiori toute sécante de C_1 fait avec $\omega\,\xi$ un angle inférieur à α. ψ a donc des nombres dérivés inférieurs, en valeur absolue, à $tg\,\alpha$; C_1 et C sont rectifiables.

(*) Pour $f = 1$ on retrouve l'un des exemples que traite M.r Hilbert.

Nous avons trouvé précédemment que C étant rectifiable son aire minima est la limite de celles des polygones inscrits dans C et tendant vers C. Soit P_1 un polygone inscrit dans C, soit n le nombre de ses sommets. Désignons par S_p celui des polyèdres à faces triangulaires qui a P_1 pour frontière, $n+p$ sommets (sur P_1 ou non) et dont l'aire est la plus petite possible.

S_p existe et peut théoriquement être obtenu par des opérations algébriques car tous les polyèdres à $n+p$ sommets peuvent se ramener par des déplacements continus des p sommets variables à un nombre fini de types, et de tels déplacements font varier l'aire d'une façon continue.

S_p ne peut avoir aucun angle polyèdre convexe, ou plus généralement aucun angle polyèdre qu'un plan P puisse couper suivant un contour fermé. Soient en effet S le sommet d'un tel angle, Γ le contour formé par ceux des côtés, ne passant pas par S, des faces qui passent en S. Γ est tout entier d'un même côté de P, donc l'angle polyèdre obtenu en joignant les sommets de Γ à la projection s de S sur P a ses faces respectivement plus petites que celles de l'angle polyèdre considéré.

S_p ne peut être coupé par un plan P suivant une courbe fermée; en effet, cette courbe limiterait sur S_p une surface Σ, soit M un point de Σ, déplaçons le plan P parallèlement à lui-même du côté de M jusqu'à la position limite Π qu'il ne peut franchir sans cesser de rencontrer Σ. Tous les sommets de Σ qui sont dans Π sont des sommets d'angles polyèdres qui peuvent être coupés par un plan suivant un contour fermé (*), ce qui est impossible.

Considérons maintenant le plan P d'une face et montrons qu'il rencontre le contour P_1, en trois points au moins. Tout d'abord il est évident que P contient au moins deux points de P_1, sans quoi on pourrait couper la surface suivant une courbe fermée par un plan voisin de P. Supposons que P ne contienne que deux points de P_1, A et B. Soit γ le contour d'un groupe de faces contenues dans P. La section de la surface par P se compose de groupes de faces et d'une ligne brisée joignant A et B à tous ces groupes de faces. Il existe donc une ligne brisée tracée sur la surface et dans P, joignant A au contour γ, soit $A\alpha$ et une ligne analogue $B\beta$. Joignons α à β par une ligne l intérieure à γ et soient AM_1B, AM_2B les deux parties de P_1. Les

(*) Cela n'est pas absolument exact. Les sommets de Σ qui sont dans Π sont seulement tels que chacun des angles polyèdres correspondants est tout entier d'un même côté d'un plan; mais en remarquant que la frontière de Σ n'a pas de point dans Π, on démontrerait l'existence d'angles polyèdres ayant le propriété indiquée.

contours $A\,M_1\,\beta\,l\,\alpha\,A$, $A\,M_2\,B\,\beta\,l\,\alpha\,A$, ne traversent pas le plan P il en est donc de même des portions de S_p limitées par ces contours. Or sur l'une des deux lignes brisées α, β, en lesquelles est divisé γ, on pourra trouver un sommet Q tel que les deux côtés qui aboutissent en Q forment un angle aigu. On voit sans difficulté qu'un plan voisin de P coupe l'angle polyèdre Q suivant une courbe fermée; ce qui est impossible.

Dans ce qui précède nous n'avons rien supposé sur le polygone P_1, il nous faut tenir compte maintenant du fait que, comme C, il vérifie les deux conditions énoncées au début de ce paragraphe.

La projection de S_p est alors le domaine du plan des $x\,y$ limité par la projection p_1 de P_1, chaque point de ce domaine étant projection d'un seul point de S_p (*). L'équation de S_p sera donc de la forme

$$z = f(x, y),$$

f ayant des nombres dérivés au plus égaux, en valeur absolue, à $tg\,\alpha$ et étant définie dans le domaine limité par p_1.

Considérons l'une des surfaces S_p d'indice assez grand pour que son aire diffère de l'aire minima de P_1 de moins de ε_1. Ajoutons à S_p les triangles qui ont pour bases les côtés de P_1 et respectivement pour sommets les milieux des arcs que limitent sur C les bases correspondantes.

La nouvelle surface a un contour P'_1 sur lequel nous opérons comme sur P_1, et ainsi de suite.

Nous sommes conduits à une surface S^1

$$z = f_1(x, y),$$

f_1 étant définie dans c, et ayant ses nombres dérivés inférieurs à $tg\,\alpha$. Si a_1 est l'aire de la portion du plan comprise entre c et p_1, l'aire de S^1 diffère de l'aire minima de P_1 de moins de

$$\varepsilon_1 + \frac{a_1}{\cos\alpha}.$$

Choisissons une suite de polygones P_1, $P_2\ldots$ inscrits dans C et tendant vers C et des nombres ε_1, $\varepsilon_2\ldots$ décroissant jusqu'à zéro. A P_i on fait correspondre une surface $S^i\,[z = f_i(x, y)]$ dont l'aire diffère de l'aire minima

(*) S'il en était autrement on pourrait en effet trouver un plan parallèle à $o\,z$ qui couperait S_p suivant une courbe fermée.

de P_i de moins de

$$\varepsilon_i + \frac{a_i}{\cos \alpha} .$$

La méthode de M.r Hilbert appliquée aux fonctions $f_i(x, y)$ nous permet de trouver une surface S

$$z = f(x, y)$$

limite de certaines des surfaces S^i. ε_i et a_i tendant vers zéro, les aires des S_i tendent vers l'aire minima de C, qui est donc l'aire de S. Nous savons de plus que les nombres dérivés de f sont, en valeur absolue, au plus égaux à $tg\, \alpha$.

Nous avons donc prouvé, dans un cas particulier, l'existence d'une solution pour le problème de Plateau généralisé que nous nous étions proposé.

98. L'exemple précédent nous montre que les raisonnements du § 95 ne suffisent pas pour prouver immédiatement l'existence d'une surface rendant minimum la fonction $\varphi(S)$, tandis qu'ils suffisaient dans un cas étendu pour la fonction $\varphi(C)$. En traitant le cas particulier relatif à l'intégrale $\int\int_S d\,a$ nous allons voir comment l'on peut dans certains cas démontrer l'existence de l'élément limite. Les raisonnements suivants s'appliqueront toutes les fois qu'on voudra démontrer l'existence d'une surface limitée par un contour donné C et rendant minimum $\varphi(S)$ si l'on sait:

1.° qu'il existe une suite de surfaces S_1, $S_2 \ldots$ dont les aires sont bornées et telles que $\varphi(S_i)$ tende vers $m\,\varphi(S)$,

2.° que la distance de deux points de S_i reste, quel que soit i, inférieure à un nombre fixe l, qui tend vers zéro avec le plus grand diamètre de C.

99. Soit C le contour donné. Soient S_1, $S_2 \ldots$ des surfaces polyédrales dont les aires tendent vers l'aire minima de C et dont les contours P_1, $P_2 \ldots$ tendent vers C; nous supposerons que ces contours n'ont aucun côté parallèle à l'un des plans coordonnés, et que les surfaces S_i n'ont aucune face parallèle aux plans coordonnés, ce qui est toujours légitime.

Divisons C à l'aide d'un nombre fini de points A, B, $C \ldots K$, en arcs tels que la projection sur $o\,x$ d'un quelconque de ces arcs couvre un segment de longueur au plus égale à ε; soient A_i, $B_i \ldots K_i$ les points de division correspondants sur P_i.

Coupons par un plan parallèle au plan des yz passant entre A et B, la section de S_i par ce plan se compose d'un certain nombre de lignes brisées. Le minimum de la somme des longueurs de ces lignes reste, quel que soit i, inférieur à un nombre fixe Z, ce minimum est atteint pour une certaine abscisse x_i du plan sécant $P(x_i)$. Soit L_i celle (ou l'une de celles) des lignes brisées, qui composent la section $(S_i,\ P(x_i))$, qui joint un point situé entre A_i et B_i à un autre point de $P(x_i)$. Les abscisses et les longueurs des L_i forment un ensemble borné, donc il est possible de choisir une suite de surfaces S_i pour lesquelles les L_i aient une courbe limite L (*). Cette courbe L est située dans un plan parallèle à yoz passant entre A et B et joint deux points de C.

On voit que l'on peut, parmi les S_i, choisir une suite S_1^1, S_2^1... telle que certaines sections de ces surfaces par des plans parallèles à yoz aient des courbes limites. Ces courbes limites sont rectifiables, chacune d'elles joint deux points de C; il existe au moins une extrémité de ces courbes entre A et B, au moins une entre B et C, etc.

Soient a, b deux extrémités consécutives sur C de deux courbes limites α, β; les plans de α et β, qu'on peut toujours supposer distincts, sont distants d'au plus 2ε. Soient c et d les deux autres extrémités de α et β, et soient a_i, b_i, c_i, d_i, α_i, β_i les éléments correspondant à a, b, c, d, α, β sur S_i^1. Le contour $a_i b_i$, β_i, $d_i c_i$, α_i limite sur S_i^1 une surface; d et c sont donc deux points consécutifs sur C sans quoi d_i et c_i ne seraient pas consécutifs sur S_i^1, non plus que a_i et b_i ce qui est impossible. Il en résulte que la projection de l'arc cd sur ox couvre un segment de longueur au plus égale à 2ε.

Le contour $a_i b_i$, β_i, $d_i c_i$, α_i est tout entier compris entre deux plans parallèles à yoz, P_i, Q_i, que nous prendrons aussi rapprochés que possible. Remplaçons la portion Σ de S_i^1 limitée par le contour considéré par ce que l'on obtient en remplaçant les parties de Σ non comprises entre P_i et Q_i par les parties de ces plans limitées par les courbes $(P_i,\ \Sigma)$, $(Q_i,\ \Sigma)$.

En faisant de même pour chacun des contours tels que $a_i b_i$, β_i, $d_i c_i$, α_i et chaque surface S_i^1 nous obtenons une nouvelle suite de surfaces (**) $S_1^{(1)}\ S_2^{(1)}$... On peut dire que le contour C est la somme des contours $C_1^{(1)}$, $C_2^{(1)}$... tels

(*) C'est le raisonnement qui nous a déjà servi § 61.

(**) Cette opération introduit des faces parallèles aux plans coordonnés, mais cela sera sans importance pour la suite.

que ab, β, dc, α; chacun de ces contours est compris entre deux plans parallèles à $y\,o\,z$ distants de moins de $2\,\varepsilon$. Au contour $C_j^{(1)}$ correspond sur $S_i^{(1)}$ un contour qui limite une surface $S_{i,j}^{(1)}$.

En raisonnant sur chacune des surfaces $S_{i,j}^{(1)}$ comme sur S_i, et en faisant jouer au plan $z\,o\,x$ le rôle du plan $z\,o\,y$. On est conduit à la considération de contours rectifiables $C_1^{(2)}$, $C_2^{(2)}$, ... dont C est la somme; ces contours sont formés d'arcs des $C_i^{(1)}$ et de courbes situées dans des plans parallèles à $z\,o\,x$, chacun d'eux est compris entre deux plans $x = \text{const.}$ distants de moins de $2\,\varepsilon$ et deux plans $y = \text{const.}$ distants de moins de $2\,\varepsilon$. On est aussi conduit à des surfaces $S_1^{(2)}$, $S_2^{(2)}$ ... dont certaines courbes tendent vers $C_1^{(2)}$, $C_2^{(2)}$ ..., les morceaux limités par ces courbes étant contenus dans les plus petits prismes quadrangulaires, de faces parallèles à $z\,o\,x$ et $y\,o\,z$, qui en contiennent les frontières.

Remplaçant enfin le plan $z\,o\,x$ par le plan $x\,o\,y$, on est conduit à des contours

$$C_{1,1},\ C_{1,2},\ \ldots$$

rectifiables que l'on peut enfermer dans des cubes de côté $2\,\varepsilon$, dont C est la somme et à une suite de surfaces

$$S_{1,1},\ S_{1,2},\ \ldots$$

dont certaines courbes tendent vers ces contours; les morceaux ainsi limités sur ces surfaces étant enfermés dans les plus petits parallélépipèdes, de faces parallèles à $x\,o\,y$, $y\,o\,z$, $z\,o\,x$, qui en contiennent les frontières.

En raisonnant sur les surfaces $S_{1,i}$ comme sur les surfaces S_i, et en remplaçant ε par $\frac{\varepsilon}{2}$ nous sommes conduits à la suite $S_{2,i}$; puis en remplaçant ε par $\frac{\varepsilon}{3}$ à la suite $S_{3,i}$ et ainsi de suite. Nous aurons aussi les contours $C_{2,i}$, $C_{3,i}$ ...

Ceci posé, considérons un contour c fermé sans point multiple du plan (u, v); nous le faisons correspondre au contour C. Divisons le domaine limité par c en domaines partiels à l'aide de contours sans point double $c_{1,1}, c_{1,2}$ ... Nous supposons ces contours choisis de manière qu'il soit possible, pour i assez grand, de faire correspondre $S_{1,i}$ au domaine limité par c de façon que les contours de $S_{1,i}$ qui tendent vers $C_{1,1}$ $C_{1,2}$ ... correspondent à $c_{1,1}$, $c_{1,2}$ ...

Nous avons de la sorte une correspondance entre le réseau des contours $C_{1,1}\,C_{1,2}$ ... qui respecte la correspondance déjà établie entre C et c. Nous

traçons des contours $c_{2,1}$, $c_{2,2}\dots$ que l'on peut faire correspondre à $C_{2,1}$, $C_{2,2}\dots$ sans détruire les correspondances déjà établies, et ainsi de suite.

Montrons qu'il est possible de définir dans le domaine limité sur c, trois fonctions continues par rapport à l'ensemble (u, v):

$$x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v), \qquad z = \psi(u, v),$$

par la condition qu'à tout point d'une courbe $c_{i,j}$ elles fassent correspondre le point homologue de $C_{i,j}$. f, φ, ψ sont actuellement définies pour l'ensemble E des points de $c_{i,j}$; il suffit donc de démontrer qu'à tous les points de E, suffisamment voisins d'un point choisi arbitrairement (u_0, v_0) correspondent des points distants entre eux de moins de η.

Choisissons n assez grand pour que $2\frac{\varepsilon}{n}\sqrt{3}$ soit inférieur à η. Le point (u_0, v_0) est à l'intérieur d'un contour $c_{n,i}$ ou sur plusieurs de ces contour c_{n,i_1}, $c_{n,i_2},\dots c_{n,i_p}$. A tous les points de E intérieurs à C_{n,i_1} ou sur C_{n,i_1} correspondent des points, soit intérieurs au plus petit parallélépipède de faces parallèles aux plans coordonnés et qui contient C_{n,i_1}, soit situé sur ce parallélépipède; donc des points qui diffèrent de moins de $\frac{\varepsilon}{n}\sqrt{3}$. Et comme tous les c_{n,i_α} ont au moins un point commun, à tous les points intérieurs à la somme des domaines qu'ils limitent correspondent des points distants de moins de η.

Les fonctions f, φ, ψ définissent une surface S limitée par C et sur laquelle sont tracés les contours rectifiables C_{ij}.

L'aire de cette surface est la limite, pour n infini, de la somme des aires minima des contours $C_{n,i}$. Cette somme est au plus égale à la plus petite limite des aires des surfaces $S_{n,i}$. Mais l'opération qui permet de passer de S_1, $S_2\dots$ à $S_{1,1}$, $S_{1,2},\dots$ n'augmente pas la plus petite limite des aires; de même on n'augmente pas cette limite en passant des $S_{1,i}$ aux $S_{2,i}$, etc., donc l'aire de S est au plus égale à l'aire minima de C. D'ailleurs l'aire de S ne peut être inférieure à cette aire minima, *nous avons donc démontré l'existence d'une surface d'aire minima limitée par un contour quelconque donné.*

100. Il nous reste à nous demander si la solution obtenue est l'unique solution du problème.

La surface définie par

$$x = 2\left(\rho - \frac{1}{2}\right)\cos\omega, \qquad y = 2\left(\rho - \frac{1}{2}\right)\sin\omega, \qquad z = 0,$$

pour $1 \geqq \rho \geqq \frac{1}{2}$, et par

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = \frac{1}{2} - \rho,$$

pour $\frac{1}{2} \geqq \rho \geqq 0$, est minima pour son contour qui est la circonférence de rayon 1 du plan des xy et cependant ce n'est pas une surface plane.

Cet exemple montre que, dans le cas des surfaces, si l'un des problèmes que nous faisons correspondre aux problèmes ordinaires du calcul des variations admet une solution, il en admet une infinité.

101. Nous avons déjà remarqué combien il était plus difficile de démontrer l'existence de l'élément limite pour $\varphi(S)$ que pour $\varphi(C)$; nous pouvons apercevoir maintenant une différence nouvelle. Tandis que, pour le cas de la courbe, la nature des conditions aux limites importait peu, dans le cas de la surface la difficulté du problème varie avec la nature de ces conditions.

Supposons en effet qu'il ne s'agisse plus de trouver la surface d'aire minima passant par un contour fixe donné, mais supposons qu'une partie de ce contour soit assujettie à rester sur une surface S. En reprenant les raisonnements précédents on est conduit aux fonctions

$$x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v), \qquad z = \psi(u, v)$$

définies pour tous les points *intérieurs* à c et continues en (u, v) pour ces points; mais l'on ne sait rien pour les points de c. L'ensemble des points correspondant à ceux d'un domaine limité par c_1, intérieure à c, forme une surface; quand c_1 tend vers c l'aire de cette surface tend vers la valeur minima des aires des surfaces répondant à la question, mais nous ne savons pas si la courbe correspondant à c_1 a une limite.

102. Il serait intéressant de savoir quelles relations il y a entre les surfaces d'aire minima que nous avons trouvées et celles qui satisfont à l'équation aux dérivées partielles

$$(1 + q^2) r - 2 p q s + (1 + p^2) t = 0. \qquad (1)$$

Remarquons d'abord que si le problème de Plateau, tel qu'on le pose dans la théorie des surfaces, admet une solution, cette solution convient aussi au problème généralisé. En effet, par hypothèse il n'existe pas de surface, telle que p, q, r, s, t, existent et soient continues, passant par le contour donné et ayant une aire plus petite que la surface S solution du problème non généralisé; s'il existait une surface S_1 d'aire inférieure à celle de S, il

existerait une surface Σ_1 d'aire aussi voisine qu'on le veut de celle de S_1, passant par le contour donné, et telle qu'en tous ces points, sauf peut-être sur le contour, p, q, r, s, t existent et soient continues (*). Il y a donc contradiction.

Il faudrait rechercher maintenant si, parmi les surfaces solutions du problème généralisé, ne se trouve pas une surface satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles (1). La méthode qui paraît la plus naturelle consiste à démontrer successivement l'existence et la continuité de chacune des dérivées nécessaires à l'établissement de la formule (1). Les raisonnements qui suivent montrent que dans certains cas des considérations élémentaires permettent d'aborder cette question.

103. Nous supposons que le contour donné C satisfait aux conditions du paragraphe 97 et que, de plus, il est tel que S, une des surfaces d'aire minima construites comme il a été dit à ce paragraphe, ne soit rencontrée par aucune droite en un nombre infini de points.

Ces conditions sont compatibles, puisqu'elles sont satisfaites quand S est une surface analytique et C un contour assez petit tracé sur cette surface.

On a vu que S est de la forme $z = f(x, y)$, les nombres dérivés de z étant inférieurs à un certain nombre M, quand on se déplace sur une courbe rectifiable quelconque du plan des xy, et que l'on considère z comme fonction de la longueur s parcourue sur cette courbe.

Coupons S par un plan quelconque P parallèle à oz, il existe une courbe section dont l'équation est $z = \varphi(s)$. Cette courbe admet en un point quelconque A deux demi-tangentes, c'est-à-dire que φ a des dérivées à droite et à gauche; s'il en était autrement, si par exemple il n'existait pas de dérivée à droite, la droite issue du point A, située dans P, et faisant avec le plan des xy un angle dont la tangente est $\frac{\Lambda_d + \lambda_d}{2}$, ($\Lambda_d$ et λ_d étant les nombres dérivés à droite de φ sont inférieurs à M), rencontrerait la courbe section, et par suite S, en un nombre infini de points (**).

(*) On pourra obtenir cette surface Σ_1 en modifiant celle d'un des polyèdres qui servent à définir l'aire de S_1.

(**) C'est uniquement par cette conséquence qu'intervient dans le raisonnement la condition: S n'est rencontrée par aucune droite en un nombre infini de points. Les demi-tangentes peuvent d'ailleurs exister sans que la condition précédente soit vérifiée. J'ai énoncé cette condition parce que j'avais cru démontrer qu'elle était remplie, lorsque le

104. Soit a la projection de A sur le plan des $x\,y$. Traçons de a comme centre une circonférence Γ de rayon r, soit γ la courbe de S qui se projette en Γ, et soit γ_1 l'homothétique de γ, A étant le centre d'homothétie et le rapport étant tel que la projection de γ_1 soit la circonférence Γ_1 de rayon 1.

Soit $z = \psi(s)$ l'équation de γ_1, s étant l'arc de Γ_1. Si l'on fait tendre r vers zéro, s restant fixe, ψ tend vers une valeur limite $\chi(s)$, $z = \chi(s)$ définissant l'ensemble des points qui se projettent sur Γ_1 et sont situés sur les demi-tangentes précédemment trouvées. Mais $\psi(s)$ a ses nombres dérivés inférieurs à M, de là se déduit immédiatement que $\psi(s)$ tend uniformément vers $\chi(s)$; donc $\chi(s)$ est continue, les demi-tangentes forment un cône Λ.

Désignons par $\varepsilon(\rho)$ le maximum de $|\chi(s) - \psi(s)|$ quand r est inférieur ou égal à ρ, $\varepsilon(\rho)$ tend vers zéro avec ρ.

Remarquons encore que $\chi(s)$ ayant ses nombres dérivés inférieurs à M, la courbe $z = \chi(s)$ est rectifiable; Λ est applicable sur le plan, donc quarrable.

Soit λ la courbe de Λ qui se projette sur Γ. Désignons par s et σ les aires des domaines S' et Λ' limités sur S et Λ par les courbes rectifiables γ et λ. Nous allons chercher une limite supérieure de la quantité $\frac{1}{r^2}|s - \sigma|$.

Soit η un nombre positif arbitrairement choisi; pourvu que l'on trace sur Λ assez de génératrices on partage Λ' en morceaux tels que la somme des aires minima des contours de ces morceaux diffère de l'aire Λ' de moins de $r^2\eta$. Alors en conservant les mêmes génératrices il en est de même quel que soit r.

Les cylindres qui projettent sur $x\,y$ les contours qui divisent Λ' en morceaux, tracent sur S' des contours qui divisent cette surface en morceaux correspondants. L'aire de S' est exactement la somme des aires minima des contours de ces morceaux. Or les aires minima de deux contours correspondants diffèrent de moins de l'aire que limitent ces deux contours sur le cylindre parallèle à $o\,z$ sur lequel ils sont tracés. Si donc $l\,r$ est la somme des longueurs des bases, dans $x\,o\,y$, de ces cylindres on a:

$$|s - \sigma| < r^2\eta + l\,r\,.\,r\,\varepsilon(r).$$

Dans cette formule l est indépendant de r, mais dépend de η, $\varepsilon(r)$ tend vers

---

contour satisfait à certaines conditions, à l'aide de raisonnements élémentaires sur les polyèdres qui servent à définir S, § 97. Je considère encore comme probable que, au moins pour des contours simples, de tels raisonnements conduiraient à la démonstration, bien que je ne sois parvenu dans aucun cas à cette démonstration.

zéro avec r; donc, à condition de prendre r assez petit, on a

$$\frac{|s-\sigma|}{r^2} < 2\eta$$

et cela quel que soit η.

r étant ainsi choisi, remplaçons S' par la surface Λ' et la bande que limitent γ et λ sur le cylindre parallèle à $o z$ qui les contient. L'aire de cette nouvelle surface S'_1 est au plus $s+2\eta r^2+2\pi r^2 \varepsilon(r)$; donc si r est assez petit elle est inférieure à $s+3\eta r^2$.

Ceci posé je dis que Λ est une surface minima. En effet, s'il n'en est pas ainsi, on peut remplacer Λ' par une surface Λ'_1 limitée à γ et d'aire plus petite; soit $\sigma - K^2 r^2$ son aire, K est indépendant de r. Par ce changement on remplace S'_1 par S'_2 dont l'aire est au plus $s+(3\eta - K^2) r^2$.

Mais puisque η peut être pris aussi petit que l'on veut, si K n'est pas nul S n'est pas une surface d'aire minima. Donc K est nul, Λ est une surface d'aire minima.

105. Il nous reste à rechercher quels sont les cônes Λ d'aire minima. Appliquons Λ sur le plan et traçons sur la surface ainsi développée une circonférence L_1, soit L cette courbe avant le développement. Si Λ n'est pas un plan (*) on peut trouver sur L deux points A, B tels que la distance $A B$ ne soit pas égale à la distance des points correspondants A_1, B_1 de L_1. Considérons le cône Σ de sommet A et de directrice L. Soient a et a' deux points de L voisins de A, de part et d'autre de A; développons la portion de ce cône qui comprend $A B$ et qui est limitée par $A a$ et $A a'$. Soit $A_2 B_2$ le développement de $A B$, sans faire varier $A_2 B_2$ faisons tendre a et a' vers A, ce que nous obtenons ainsi peut être appelé le développement du cône Σ, ouvert suivant sa génératrice de longueur nulle (**).

Soit L_2 le développement de L, l'aire limitée par L_2 dans le développement est l'aire que limite L sur Σ, or cette aire est plus petite que celle que limite L sur Λ, ou L_1 dans le plan, puisque L_2 n'est pas une circonférence.

(*) On sait que Λ est de la forme $z=f(x, y)$, on n'a donc pas à examiner le cas où Λ recouvrirait plusieurs fois un plan.

(**) Ces précautions seraient inutiles si l'on démontrait que L a des tangentes. En s'appuyant sur la condition: S n'est rencontrée par aucune droite en un nombre infini de points, on démontre que le long de chaque génératrice de Λ existent deux demi-plans tangents. Or l'ensemble de ces deux demi-plans doit former une surface minima, donc Λ a des plans tangents, L a des tangentes.

Donc A est un plan, *la surface S admet des plans tangents.*

La démonstration précédente suppose établi que, de toutes les courbes isopérimètres, la circonférence est celle qui enferme la plus grande aire et qu'il n'existe aucune courbe de même périmètre enfermant la même aire que la circonférence. Il existe plusieurs démonstrations rigoureuses de cette propriété; pour l'application précédente il est nécessaire, ce qui est facile, d'étendre ces démonstrations au cas où les courbes seraient tracées sur une surface de Riemann ayant des lignes de croisement issues de A_2, car nous n'avons pas démontré que C_2 ne tournait pas autour de A_2.

Vu et approuvé:
Paris, le 10 février 1902.
Le Doyen de la Faculté des Sciences,
G. DARBOUX.

Vu et permis d'imprimer:
Paris, le 10 février 1902.
Le Vice-Recteur de l'Académie de Paris,
GRÉARD.

SECONDE THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Surfaces Minima.

Vu et approuvé:
Paris, le 10 février 1902.
LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
G. DARBOUX.

Vu et permis d'imprimer:
Paris, le 10 février 1902.
LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
GRÉARD.

Milan. — Imprimerie BERNARDONI DE C. REBESCHINI & C. Rue Rovello, 14-16.

N° D'ORDRE
1105.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. HENRI LEBESGUE,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, PROFESSEUR AU LYCÉE DE NANCY.

1re THÈSE. — INTÉGRALE, LONGUEUR, AIRE.
2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 30 juin 1902 devant la Commission d'Examen.

MM. PICARD, *Président.*
KOENIGS, GOURSAT, *Examinateurs.*

MILAN,
IMPRIMERIE BERNARDONI DE C. REBESCHINI & C.
Rue Rovello, 14-16.

1902


UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
Q.515.43L487I C001
INTEGRALE, LONGUEUR, AIRE MILAN
3 0112 017448793